

Eindrapport van het project DefoGuide: GUIDELINES FOR GEODETIC DEFORMATION MONITORING



Hiddo Velsink

19 mei 2016

Inhoudsopgave

Voorwoord	4
Inleiding	6
1 Huidige regelgeving en praktijk	8
1.1 Inleiding	8
1.2 Wet- en regelgeving en manieren van opdrachten geven	8
1.2.1 Domeinen	8
1.2.2 Wet- en regelgeving	9
1.2.3 Functioneel aanbesteden en aanbesteden op prijs	10
1.3 Normen voor geodetische deformatieanalyse	10
1.4 Eisen aan geometrische nauwkeurigheid in de praktijk	11
1.4.1 Rijkswaterstaat: Productspecificaties Deformatiemeting Kunstwerken	11
1.4.2 Industrieleidraad Mijnbouw	11
1.4.2.1 Leidraad	11
1.4.2.2 Precisie, betrouwbaarheid en nauwkeurigheid	12
1.4.2.3 Referentiepunt	12
1.4.2.4 Analyse vrij-netwerkvereffening	13
1.4.3 Havenbedrijf Rotterdam	13
1.4.3.1 Europese aanbesteding kademuur	13
1.4.4 Overige casussen	14
2 Een normeringsmodel voor geodetische deformatieanalyse	15
2.1 Inleiding	15
2.2 Product van geodetische deformatieanalyse	16
2.3 Analysemodel	16
2.3.1 Parameter- en waarnemingsruimte	17
2.3.2 Hypotheses toetsen	18
2.3.3 Waarnemingen zijn modelafhankelijk	18
2.3.4 Discretisatie van een geo-object	18
2.3.4.1 Elementaire locatie-indicatoren	18
2.3.5 Trend, signaal en ruis	19
2.3.6 Analyse van een epoche en tijdreeksanalyse	19
2.4 Gebruik van het analysemodel	20
2.4.1 Typen deformatieanalyse	20
2.4.2 Geodetische en andere modellen	20
2.4.3 Interpretatie van metingen	20
2.5 Normeringsmodel	20
3 Analyse van hoogteveranderingen	24
3.1 Inleiding	24
3.2 Eén hoogte op twee tijdstippen	24
3.2.1 Standaardafwijking van de verandering	24
3.2.2 Toetsing van de verandering	25
3.2.3 Grenswaarde	25
3.2.4 Tolerantie en grenswaarde	26

3.2.5	Via de methode van de kleinste kwadraten	27
3.2.5.1	Toetsing	27
3.2.5.2	Grenswaarde	27
3.2.6	Conclusie over één punt en zijn hoogte	28
3.3	Wat is een hoogte?	28
3.3.1	Definitie van hoogte	28
3.3.2	Welke hoogteverandering willen we weten?	29
3.4	Drie punten en hun hoogtes	30
3.5	Deformatieanalyse met hoogteverschillen	30
3.5.1	De waarnemingen y en de parameters x	31
3.5.2	Waarnemingsvergelijkingen en coëfficiëntenmatrix A	32
3.5.3	Vereffening, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van twee epochen	32
3.5.4	Berekeningen met MOVE3	33
3.6	Deformatieanalyse met hoogtes	33
3.6.1	De <i>principal property</i> van prof. Tienstra	33
3.6.2	De eerste fase: hoogteverschillen	33
3.6.3	De tweede fase: hoogtes	34
3.7	Schrinking	35
3.8	Eén- en meerdimensionale grenswaarden	35
3.9	Conclusies over de analyse van hoogteveranderingen	36
4	Analyse van positieveranderingen	37
4.1	Inleiding	37
4.2	Eén punt en zijn positieverandering	37
4.2.1	Standaardafwijking van de verandering	38
4.2.2	Toetsing van de verandering	40
4.2.2.1	Toetsingsgrootte	40
4.2.2.2	Gelijke precisie, geen correlatie	41
4.2.3	Grenswaarde van de opspoorbare deformatie	42
4.2.3.1	Grenswaarde-ellips(oïde)	42
4.2.3.2	Gelijke precisie, geen correlatie	44
4.2.3.3	Ongelijke standaardafwijkingen en correlatie	45
4.2.3.4	Normstelling	45
4.2.3.5	Effect van correlatie	45
4.2.4	Via de methode van de kleinste kwadraten	46
4.2.5	Conclusies over één punt en zijn positieverandering	46
4.3	Puntenveld en relatieve puntposities	47
4.3.1	Vorm en grootte	47
4.3.1.1	Tweedimensionaal, plat vlak	48
4.3.1.2	Driedimensionale Euclidische ruimte	49
4.3.1.3	Tweedimensionale, gekromde ruimte	50
4.3.2	Eindige-elementenmethode	50
4.3.2.1	Vormgrootheden en eindige elementen	50
4.3.2.2	Geodetische modellen en a-priori-informatie	50
4.3.3	Analyse en normering met vormgrootheden	51
4.3.3.1	Vereffeningmodel	51
4.3.3.2	Principal property	52
4.3.3.3	Normering	53
4.3.4	Absoluut en relatief	53
4.3.4.1	Definitie van absolute en relatieve deformatie	53
4.3.4.2	Referentie- en objectpunten	54
4.3.4.3	Theoretische en operationele definitie van het referentiestelsel	54
4.4	Vorm en grootte beschrijven met coördinaten	54
4.4.1	Deformatieanalyse in één of twee Tienstrafasen	55
4.4.1.1	Eerste methode	55
4.4.1.2	Tweede methode: splitsing in twee Tienstrafasen	56
4.4.1.3	Eerste of tweede methode?	57
4.4.1.4	Niet-stochastische waarnemingen	57

4.4.2	Samenvoegen van epochen	58
4.5	Deformatieanalyse met geodetische waarnemingen	60
4.5.1	Inleiding	60
4.5.2	Vereffeningsmodel	60
4.5.2.1	Vijf waarnemingstypen	61
4.5.2.2	Coördinaatverschillen als waarnemingen	63
4.5.2.3	Schranking	63
4.5.2.4	Ruimtelijke en temporele inter- en extrapolatie	64
4.5.2.5	Singuliere covariantiematrix	64
4.5.2.6	Oplossingsmethoden	65
4.5.3	Fasegewijze aanpak	65
4.5.4	Toetsen	66
4.5.4.1	Deformatiemodellen toetsen	66
4.5.4.2	Grenswaarde-ellips(oïd)en en -hyperellipsoiden	68
4.5.5	Normering	68
4.5.6	Voorbeeld	68
4.6	Deformatieanalyse met coördinaten	69
4.7	Conclusies over de analyse van positieveranderingen	70
5	Software	73
5.1	Software voor deformatieanalyse - stand mei 2016	73
5.2	MOVE3	74
5.3	Software Antea Group	75
5.4	NAM-software	75
5.5	TU Delft	76
5.6	Skygeo	76
5.7	Houtenbos' SuRe	76
5.8	Hiddo's Matlabprogramma's	76
6	Conclusies	77
	Referenties	80
A	Formules van de kleinste-kwadratenmethode	82
B	Neiging en assen van een ellips	86
C	Projectbeschrijving DefoGuide	88
	Index	93

Voorwoord

In februari 2014 heb ik het initiatief genomen om een aanvraag in te dienen voor een *Kort Innovatief Project*, een K.I.P., binnen het onderzoeksprogramma *Maps4Society*, waarvoor maximaal €50.000 kon worden aangevraagd. Het was slechts enkele weken vóór de indieningsdatum dat ik mij realiseerde, dat het *niet* indienen van een aanvraag dom zou zijn. De *call for proposals* vermeldde immers *deformation and change monitoring* als een van de toepassingsgebieden, die voor financiële ondersteuning in aanmerking kwam. En dat zie je niet vaak. Bovendien werd samenwerking met hogescholen als een pre aangemerkt.

Sinds eind 2011 voer ik een onderzoek uit naar de techniek, governance en communicatie van geodetische deformatiemetingen (zie phd.hazenpost.nl) als promotieonderzoek bij de TU Delft met prof. Hanssen als promotor en prof. Versendaal (Hogeschool Utrecht) en prof. Niemeier (TU Braunschweig) als copromotoren. Een K.I.P.-project *Guidelines for Geodetic Deformation Monitoring* zou uitstekend passen binnen dit promotieonderzoek.

Omdat een academische universiteit de aanvraag moest indienen, heb ik contact opgenomen met prof. Hanssen, die meteen akkoord ging om samen de aanvraag in te dienen. De *call for proposals* eiste, dat een overheidsinstantie en een bedrijf in ieder geval moesten deelnemen en dat kon met een bijdrage in natura. Een telefoontje naar de Grontmij en Fugro Geoservices leverde meteen positieve reacties op. Contact met Rijkswaterstaat leverde niet veel later ook een direct positieve reactie op. Ik stuurde een conceptaanvraag naar Antea Group en Geomaat en die reageerden heel snel met een positief antwoord. Ik had blijkbaar de goede snaar geraakt. De ondertekende “letters of support” kwamen snel binnen. Een paar maanden later kreeg ik de goedkeurings-e-mail toegestuurd: we konden beginnen!

In 2014 en 2015 zijn we eens in de zes weken bijeen gekomen. Na enige tijd gingen ook een medewerker van NAM en een medewerker van Brem Funderingsexpertise aan de bijeenkomsten deelnemen. De laatste bijeenkomst was ook RPS van de partij. De bijeenkomsten waren heel vruchtbaar. Er werden discussies gevoerd over de manieren, waarop deformatiemetingen worden uitgevoerd, wat deformatiemetingen zijn en hoe ze uitgevoerd moeten worden. In december 2014 gebruikte ik de bijeenkomst voor de eerste keer om een soort college te geven over hoe een goede deformatieanalyse, gebaseerd op statistische verantwoorde methoden, eruit kan zien. Ik schreef de teksten uit en maakte er presentaties bij. Nog enkele bijeenkomsten daarna heb ik dat gedaan. Deze teksten vormen het grootste gedeelte van de hoofdstukken 3 en 4. Tegelijkertijd bekeek ik de mogelijkheid om er wetenschappelijke artikelen van te maken. Daarvoor ging ik intensief in de internationale literatuur kijken, wat er al over was gepubliceerd. Het werd mij duidelijk, dat:

- enerzijds in de beroepspraktijk nauwelijks tot geen gebruik wordt gemaakt van de mogelijkheden die geodesie en statistiek bieden om een goede deformatieanalyse uit te voeren (positieve uitzonderingen natuurlijk daargelaten);
- anderzijds de door mij uitgeschreven methode in de internationale literatuur niet terug te vinden was, terwijl de methode wel mogelijkheden biedt, die gepubliceerde methoden niet bieden; met name de mogelijkheid om geodetisch gedefinieerde *grenswaarden* van deformatiehypotheses te gebruiken als normen voor deformatiemetingen.

Het resultaat was dat het accent van het onderzoek zwaar is komen te liggen op het ontwikkelen en wetenschappelijk onderbouwen met publicaties van een mathematisch-geodetisch analysemodel.

De zeswekelijkse bijeenkomsten waren zeer belangrijk om het veld van de geodetische deformatiemetingen in Nederland goed te leren kennen en de sterke en zwakke punten ervan boven tafel te krijgen. De combinatie van enerzijds praktische overwegingen, die de deelnemers in de bijeenkomsten inbrachten en anderzijds de verdieping in theoretische aspecten, heb ik als heel leuk en uitdagend ervaren. Een

aparte positie namen Gerard Verkuijl en Gijs Boekelo van Grontmij (nu: Sweco) in, omdat zij het softwarepakket dat zij vertegenwoordigen, MOVE3, geschikt willen maken voor goede deformatieanalyses. Zij hadden weer een andere invalshoek op de problematiek.

Ik wil de partners in het project van harte bedanken voor hun bijdrages. Caroline den Besten van Rijkswaterstaat heeft in haar praktijk veel met deformatiemetingen te maken en haar niet-geodetische invalshoek was heel leerzaam en zette aan tot goede discussies. Martin Kodde (Fugro Geoservices) is wel geodeet en kon juist daardoor belangrijke opmerkingen maken. Arjan Ooms (Antea Group) gaf een praktische invalshoek als projectleider en zorgde voor een kennismaking met hun software voor deformatieanalyse. Jolle Jelle de Vries had praktische opmerkingen en zorgde voor nuttig testmateriaal. Harry Piening en Wilfred Veldwisch (NAM) gaven inzicht in de denkwijze en aanpak bij de NAM, die samen met Rijkswaterstaat en Prorail, tot de grote opdrachtgevers voor deformatiemetingen behoort. Jeroen van Ravenzwaaij, niet-geodeet en aanbieder van deformatiemetingen met glasvezels, maakte duidelijk, dat geodetische oplossingen niet altijd de beste zijn.

Geodetische deformatieanalyse is een onderbelicht vakgebied. Slechts een beperkt aantal mensen in Nederland is op dit vakgebied deskundig, terwijl het maatschappelijk belang groot is. De financiële en maatschappelijke consequenties van de conclusies die uit de deformatieanalyses volgen kunnen groot zijn. Ik hoop, dat dit project het begin is van meer aandacht voor dit fascinerende vakgebied.

Hiddo Velsink, 19 mei 2016

Inleiding

Dit rapport bevat de eindrapportage van het project *DefoGuide*, dat wordt gefinancierd door het onderzoeksprogramma *Maps4Society*. Maps4Society is een initiatief waarin de Maps4Societypartners (Rijkswaterstaat, Kadaster, het Netherlands Space Office (NSO) en de Nederlandse Commissie voor Geodesie (nu: Nederlands Centrum voor Geodesie en Geo-informatica)) onderzoeksthema's vaststellen en financieren. Het doel van het programma is om de bestaande nationale geoinformatie-infrastructuur (PDOK, NMDC en de nationale Satellite Data Portal) via diverse innovaties te verbeteren en deze af te stemmen met de internationale ontwikkelingen. De projectbeschrijving van DefoGuide is in bijlage C opgenomen.

Het project is uitgevoerd door de TU Delft als hoofdaannemer en de Hogeschool Utrecht als medeaannemer. Partners in het project zijn Rijkswaterstaat, Grontmij (nu: Sweco), Fugro Geoservices, Antea Group en Geomaat. Later in het project zijn NAM, Brem Funderingsexpertise en RPS aangeschoven bij de zeswekelijkse projectbesprekingen van de projectleider met de partners. De projectleider, en feitelijk uitvoerder van het project, is Hiddo Velsink geweest, ook de auteur van dit rapport.

In de projectbeschrijving luidt de onderzoeksvraag, vertaald naar het Nederlands:

“Hoe ziet een model eruit dat de domeinen, de belangrijkste spelers, de wetgeving, de meettechnieken en de producten van geodetische deformatiemetingen (gdm) beschrijft en dat kan worden gebruikt als basis voor normen die gehanteerd worden bij de aansturing en aanbeveling van gdm?”

De te verwachten resultaten worden als volgt omschreven:

“Een conceptueel model zal worden gebouwd dat de domeinen, de belangrijkste spelers, de wetgeving, de meettechnieken en de producten van gdm beschrijft. Het model zal een uniforme terminologie gebruiken, zal verschillende abstractieniveaus onderscheiden en zal toegepast kunnen worden voor het bepalen van normen. Als de tijd en de middelen het toelaten zullen voorbeelden van geschreven normen, gebaseerd op het model, worden uitgewerkt. Het model zal worden gevalideerd door de partners op een zodanige wijze dat de toepasbaarheid is gewaarborgd. Een verslag en ten minste één artikel zullen aan het project worden gewijd. Het rapport zal aandacht besteden aan de follow-up van onderzoek en implementatie. Een symposium zal worden georganiseerd om de onderzoeksresultaten te bespreken en te verspreiden.”

In hoofdstuk 1 wordt op de domeinen, de belangrijkste spelers en de wetgeving ingegaan. De meettechnieken worden niet systematisch behandeld. De belangrijkste (waterpassing, tachymetrie, GNSS, satellietradarinterferometrie, laserscanning, enz.) worden wel meegenomen in de beschrijving van het model.

Hoofdstuk 2 behandelt de opzet van het ontwikkelde normeringsmodel, waarbij ook de definitie van het product van gdm aan de orde komt. Het model kan verschillende abstractieniveaus voor het beschrijven van een deformerend object hanteren.

De hoofdstukken 3 en 4 behandelen een uitwerking van het model en gaan specifiek in op de vraag hoe je hoogte- of positieveranderingen kunt bepalen met geodetische metingen en hoe je normen daarvoor kunt opstellen.

Veel moeite is gestoken in het ontwikkelen van wat in de hoofdstukken 3 en 4 is beschreven. Voor het formuleren van normen is het allereerst nodig te bepalen, hoe een goede deformatieanalyse plaatsvindt. Bij het ontbreken van een goed analysemodel, is dat eerst ontwikkeld. Daardoor bleef er geen tijd over om al voor specifieke domeinen normen te formuleren en die te valideren.

Het ontwikkelen van het analysemodel heeft als neveneffect gehad, dat drie wetenschappelijke artikelen door Hiddo Velsink zijn geschreven, waarvan inmiddels één is gepubliceerd (Velsink, 2015b), één in review is (Velsink, 2016c) en één binnenkort aan een tijdschrift aangeboden zal worden¹. In de artikelen wordt het analysemodel beschreven en wetenschappelijk onderbouwd.

Tegelijkertijd met het ontwikkelen van het analysemodel en het schrijven van de artikelen is door Hiddo Velsink een MATLAB-programma geschreven om het model, beschreven in paragraaf 4.6, te kunnen toetsen. Het programma is gebruikt voor de voorbeelden, die in de wetenschappelijke artikelen staan. Inmiddels is het programma ook gebruikt voor testen met deformatiemetingen uit de beroepspraktijk, met goed resultaat. Het model, beschreven in paragraaf 4.5, is in eerste aanzet geïmplementeerd (buiten dit project) in het softwarepakket MOVE3 met het nieuwe waarnemingstype “verschuivingsvectoren”. De analyseresultaten met deze optie zijn veelbelovend.

Tenslotte bevat hoofdstuk 5 informatie over software, die momenteel op de Nederlandse markt aanwezig is. Het overzicht pretendeert niet compleet te zijn, maar geeft wel een beeld van de stand van zaken van de hedendaagse toepassingen van geodetische deformatieanalyse.

Op 19 mei 2016 wordt een symposium aan de Hogeschool Utrecht georganiseerd, genaamd “DefoGuide: een innovatief model voor deformatiemetingen”, waar dit rapport wordt gepresenteerd. Het aantal deelnemers is gelimiteerd op honderd en dat aantal wordt, gezien de aanmeldingen, makkelijk gehaald.

¹Dit was op het moment van schrijven: mei 2016

Hoofdstuk 1

Huidige regelgeving en praktijk

1.1 Inleiding

Normen voor geodetische deformatiemetingen (gdm) kunnen een belangrijke rol spelen bij het bevorderen van kwalitatief goede deformatieanalyses en het stimuleren van innovatie. Te veel normen en te strikte normen, vooral normen over technieken en processen, kunnen daarentegen innovatie belemmeren. Dit hoofdstuk bekijkt wat de huidige regelgeving en praktijk in Nederland is. Eerst worden relevante wetten genoemd. Dan wordt ingegaan op de wijze waarop opdrachten worden verstrekt, met name op het verschil tussen functioneel aanbesteden en aanbesteden op prijs. Geconstateerd wordt in paragraaf 1.3 dat er weinig is genormeerd en dat een beperkt aantal richtlijnen van opdrachtgevers de rol van de-facto-normen vervult. In de laatste paragraaf van dit hoofdstuk wordt ingegaan op de formulering van eisen aan nauwkeurigheid in die richtlijnen en in een praktische offerteuitvraag. Op grond van dit hoofdstuk kan worden geconcludeerd, dat er voldoende ruimte is voor verbetering van de richtlijnen en offerteuitvragen. Normen, of die nu verplicht worden voorgeschreven door een opdrachtgever of overheidsinstantie, of slechts als richtlijn dienen voor een opdrachtgever bij het formuleren van opdrachten, kunnen een positieve rol spelen bij kwaliteitsverbetering en innovatiebevordering.

1.2 Wet- en regelgeving en manieren van opdrachten geven

1.2.1 Domeinen

Geodetische deformatiemetingen kunnen op basis van wet- en regelgeving, normstelling, wijze van opdrachtverstrekking, wijze van uitvoering en wijze van conclusies trekken van elkaar verschillen. Dat blijkt afhankelijk te zijn van het toepassingsdomein. De volgende domeinen worden onderscheiden:

1. Burgerlijke en utiliteitsbouw
2. Waterbouw (rijk)
3. Waterbouw (waterschappen)
4. Mijnbouw (gas, olie, zout, steenkool)
5. Infrastructuur (rijkswegen)
6. Infrastructuur (provinciaal en gemeentelijk)
7. Railinfrastructuur
8. Industriële installaties
9. Wetenschappelijk onderzoek / lange-termijnbewegingen (zeespiegel- en klimaatverandering)

In een bijeenkomst van de partners van het project *DefoGuide* is geconstateerd, dat deze indeling de domeinen, waar de partners met gdm actief zijn, goed afdekt.

1.2.2 Wet- en regelgeving

Wet- en regelgeving kunnen aanleiding zijn voor het uitvoeren van gdm. Meestal zijn de metingen bedoeld te bepalen in hoeverre schade is toegebracht aan vastgoedobjecten op, onder of boven het aardoppervlak, of aan dat oppervlak zelf. De schade kan aanleiding zijn tot schadeclaims op grond van de wet- en regelgeving. De volgende wetten spelen hierin (op Nederlands grondgebied) een rol.

1. Algemeen Burgerlijk Wetboek Boek 6 Titel 3 Onrechtmatige daad: art. 162: “Hij die jegens een ander een onrechtmatige daad pleegt, welke hem kan worden toegerekend, is verplicht de schade die de ander dientengevolge lijdt, te vergoeden.” (zie voor de rest van de titel het [wetboek op internet](#)).

Dit is de meest algemene rechtsregel, die altijd en in alle domeinen geldt. Tegelijkertijd is de formulering zo algemeen, dat vaak niet eenduidig is te bepalen, of en in welke grootte schadevergoeding verschuldigd is. Belangrijk is ook, dat niet is geregeld, hoe de schade moet worden vastgesteld en wie voor de vaststelling de verantwoordelijkheid draagt.

2. Mijnbouwwet

De inleiding van de [Industrieleidraad ter Geodetische bepaling van bodembeweging als gevolg van mijnbouwactiviteiten](#) (op het titelblad aangeduid als “Geodetische basis voor Mijnbouw, Industrieleidraad Versie 1.0”; volgens de [webstek](#) van SodM¹ op 22 mei 2014 aan de Inspecteur-generaal der Mijnen overhandigd) beschrijft de wettelijke basis voor geodetische deformatiemetingen (gdm) in de mijnbouw:

“De mijnbouwwet omschrijft in artikel 41 de meetverplichting om de gevolgen van de winning van delfstoffen te kunnen monitoren en vastleggen. De meetverplichting rust op de houder van de winningsvergunning. Metingen worden volgens een door de Minister goedgekeurd meetplan verricht voor, tijdens en gedurende 30 jaar na beëindiging van de winning. De meetverplichting is ook ingesteld om de, in de winningsplannen omschreven bodemdalingsprognose, te checken en indien relevant het winningsplan aan te passen. De mijnbouwer heeft de plicht ervoor zorg te dragen dat de metingen op een zorgvuldige en betrouwbare wijze plaatsvinden. De meetresultaten worden binnen de daarvoor geldende tijdstippen overhandigd aan de Inspecteur Generaal der Mijnen. Het Staatstoezicht op de Mijnen (SodM) is belast met het toezicht op de uitvoering van de meetverplichting. De mijnbouwwet geeft niet expliciet aan wat er met het meetresultaat moet gebeuren.

De Technische Commissie Bodembeweging (Tcbb) is volgens artikel 114 van de mijnbouwwet ingesteld om over gevolgen (schade) door mijnbouwactiviteiten te adviseren.”

In Bijlage A van de industrieleidraad wordt een samenvatting gegeven van de relevante onderdelen van de mijnbouwwet en het mijnbouwbesluit, inclusief een brief met toelichtingen van de SodM.

De mijnbouwwet is [hier](#) te vinden.

3. Andere wet en besluiten. Andere wetten en besluiten die een belangrijke rol spelen bij geodetische deformatiemetingen zijn:

- Bouwbesluit
- Waterwet
- Waterschapswet
- Algemene Wet Bestuursrecht

Op deze wetten en besluiten wordt in dit rapport niet verder ingegaan. Het is wel wenselijk, dat nader onderzoek ernaar plaatsvindt om hun rol bij het stimuleren of juist belemmeren van kwalitatief goede deformatieanalyses duidelijk te maken.

¹SodM = Staatstoezicht op de Mijnen

1.2.3 Functioneel aanbesteden en aanbesteden op prijs

Tijdens de bijeenkomsten van het project *DefoGuide* is uitgebreid gediscussieerd over de wijze van aanbesteden van gdm en de verschillen tussen functioneel aanbesteden en aanbesteden op prijs. De volgende conclusies trok de auteur uit de discussies.

- Hoewel functioneel aanbesteden voor de overkoepelende civieltechnische, bouwtechnische, mijnbouwkundige e.d. opdrachtverstrekkingen gebruikelijk is, zijn de opdrachtformuleringen voor de gdm altijd op prijs.
 - Innovatie vindt niet plaats door functioneel aan te besteden (en dus de opdrachtnemer met initiatieven voor innovatie te laten komen), maar door proef(deel)projecten te laten uitvoeren (waarbij het initiatief voor innovatie bij de opdrachtgever ligt).
 - Redenen dat functioneel aanbesteden voor gdm niet werkt:
 - Er zijn geen duidelijk, expliciet geformuleerde productnormen. Wat is een gdm-product? Hoe beschrijf je daar de kwaliteit van? Dit onderzoek *DefoGuide* levert een eerste model voor productnormen voor gdm. Vanwege de onduidelijkheid van de normen, is er geen “objectieve” methode om de normen te toetsen. De opdrachtnemer weet niet goed, wanneer hij aan de vaag geformuleerde normen heeft voldaan. Twee oplossingen bestaan hiervoor:
 1. De opdrachtnemer houdt zich strak aan meet- en analyseprocedures, die bij eerdere projecten door de opdrachtgever zijn geaccepteerd.
 2. De opdrachtnemer treedt in overleg (na de gunning, pas bij het uitvoeren en opleveren van de producten) met de opdrachtgever om tot overeenstemming te komen, onder welke voorwaarden het geleverde werk aan de normen voldoet. Het betreft een nadere precisering van de voorwaarden op basis waarvan de gunning heeft plaatsgevonden.
- De eerste oplossing stimuleert geenszins innovatie. De tweede oplossing evenmin, want de opdrachtnemer houdt zich bij het inschrijven op de offerteuitvraag zo veel mogelijk aan in het verleden toegepaste meet- en analysemethoden, omdat afwijking daarvan te risicovol is. De opdrachtnemer kan zelf immers niet precies (niet in voldoende detail) bepalen, wanneer aan de normen is voldaan. In de offertefase een nieuwe methode bespreken met de opdrachtgever is wel mogelijk, maar die weet evenmin of en wanneer de nieuwe methode aan de normen zal voldoen. Voor de opdrachtgever zijn de normen immers even vaag en dus zal de opdrachtgever veel slagen om de arm houden. Daardoor zal de opdrachtnemer geen risicovolle innovaties durven toepassen.
- De omvang van gdm-werkzaamheden en het percentuele aandeel in de overkoepelende civieltechnische e.d. werkzaamheden, is te gering. Er is te weinig omzet om grote investeringen in innovatie te rechtvaardigen.
 - De opdrachtgever van de overkoepelende werkzaamheden is zich te weinig bewust van de eisen, waaraan gdm moeten voldoen. Het uitvoeren van de werkzaamheden in onderaannesteding maakt het waarschijnlijk, dat op prijs wordt aanbesteed. Immers, de aannemer van de civieltechnische e.d. werkzaamheden ziet de gdm als ballast, die niet bijdragen aan het product, dat hij moet opleveren. Voor gdm geldt heel sterk het spreekwoord: “als het kalf verdrongen is, dempt men de put”, ofwel, pas als deformaties tot desastreuze consequenties voor de opdrachtgever of hoofdopdrachtgever hebben geleid, is men bereid meer geld in gdm te steken. Hoewel zelfs dan het kan voorkomen (bijv. als de verzekering de schade dekt), dat men het risico op deformaties liever redelijk groot laat dan om geld te “verspillen” aan gdm. Het is in dit verband merkwaardig, dat verzekeringsmaatschappijen geen specifieke geodetische kennis in huis hebben en geodetische kennis geen of nauwelijks een rol speelt bij de vraag of een aannemer verzekerd kan worden (CAR-verzekering).

1.3 Normen voor geodetische deformatieanalyse

Normen voor geodetische deformatieanalyse zijn er niet in Nederland. Bij gebrek daaraan zijn er wel “de-facto-normen”: de *industriëleidraad* voor het domein van de mijnbouw en de *Productspecificaties De-*

formatiemeting Kunstwerken van Rijkswaterstaat voor de andere domeinen. In de bouw wordt gebruik gemaakt van de “Meten en beoordelen van trillingen: Serie A t/m C” en er is een leidraad voor het meten van deformaties van opslagtanks.

Op twee de-facto-normen (Productspecificaties Deformatiemeting Kunstwerken, Industrieleidraad Mijnbouw) en op een voorbeeld van een offerteaanvraag wordt in dit hoofdstuk nader ingegaan.

Er is globaal gekeken naar normen in het buitenland, maar een uitgebreid onderzoek is niet uitgevoerd. Het is wenselijk dat een dergelijk onderzoek wel uitgevoerd gaat worden. Vooral de Duitse normen lijken belangrijk, omdat de geodesie en de geodetische deformatieanalyse in dat land goed is ontwikkeld, omdat bodembewegingen in Nederland en het aangrenzende Duitsland vergelijkbaar gedrag vertonen en dus vergelijkbare wet- en regelgeving vergt en omdat verwacht mag worden, dat op den duur Europese regelgeving ook in dit vakgebied een rol zal gaan spelen.

1.4 Eisen aan geometrische nauwkeurigheid in de praktijk

Bij de opdrachtverstrekking, die binnen de eigen organisatie gebeurt, door onderhandse aanbesteding of via openbare aanbesteding, moeten normen worden geformuleerd. De normen bepalen, waaraan het uit te voeren werk moet voldoen. Zij zijn expliciet en gedetailleerd uitgeschreven, slechts vaag omschreven of impliciet bekend verondersteld. In deze paragraaf wordt de aandacht gericht op de formuleringen van normen voor *precisie en betrouwbaarheid van geometrie*. De formuleringen van normen komen uit offerteaanvragen voor aanbesteding, die door de partners in het project zijn aangeleverd of die op internet zijn gevonden.

1.4.1 Rijkswaterstaat: Productspecificaties Deformatiemeting Kunstwerken

Over de Productspecificaties Deformatiemeting Kunstwerken wordt in paragraaf 4.4.2 meer gezegd.

1.4.2 Industrieleidraad Mijnbouw

1.4.2.1 Leidraad

De industrieleidraad Mijnbouw (zie paragraaf 1.2.2) beschrijft niet een standaard voor deformatiemetingen en is evenmin een handleiding voor het uitvoeren van deformatiemetingen. Het zit er ergens tussenin. Van een drietal meetmethoden (waterpassen, GNSS, InSAR) wordt het meetproces beschreven en worden uitspraken gedaan over de haalbare precisie. Op Lidar wordt kort ingegaan. De beschrijvingen geven geen normen en ook geen handvatten, hoe normen geformuleerd zouden kunnen worden. Hoe de toetsing van meetresultaten aan normen moet plaatsvinden, wordt geheel niet behandeld.

In paragraaf 1.2 (blz. 6) staat, dat in de leidraad “de inrichting van meetnetten, het verwerven van gegevens, de wijze van verwerking en het rapporteren van de bodembeweging door delfstoffenwinning en/of opslag [zijn] geformaliseerd”. Het is dus niet de bedoeling om *product*normen te formuleren, maar *proces*normen. Dat is bijzonder, omdat de algemene trend in de maatschappij is om naar productnormen toe te gaan, waardoor functioneel aanbesteden mogelijk wordt. Bij functioneel aanbesteden wordt de *functie* van het op te leveren product gespecificeerd en niet hoe het product en diens functioneren tot stand komen. Bij deformatiemetingen is het product een verzameling van uitspraken over het deformatiepatroon van een geo-object. De functie van de uitspraken is het leveren van onderbouwingen voor uitspraken over de risico’s van menselijk handelen ten aanzien van het betreffende geo-object.

De leidraad heeft dus niet de bedoeling functioneel aanbesteden mogelijk te maken.

De leidraad biedt geen concrete normen voor functies en producten, maar ook niet voor de processen. Het lijkt er daarom op, dat de leidraad vooral bedoeld is om duidelijk te maken, welke aspecten van meet- en analysemethoden door de opdrachtnemer bij het werk en in de rapportage aan de orde moeten komen, zonder expliciete eisen daaraan te stellen en zonder aan te geven hoe toetsing aan gestelde eisen zou moeten plaatsvinden.

1.4.2.2 Precisie, betrouwbaarheid en nauwkeurigheid

De begrippen precisie, betrouwbaarheid en nauwkeurigheid zijn in de Nederlandse geodesie verschillende begrippen, die goed uit elkaar gehouden moeten worden. De leidraad gebruikt de begrippen slordig.

Bij de verschillende meetmethoden worden uitspraken gedaan over de precisie door het geven van getalswaarden. Meestal is niet duidelijk, wat de precieze definitie is, waarop de getalswaarde betrekking heeft. In het algemeen ontbreekt een aanduiding van de schrankingsbasis, d.w.z. relatief ten opzichte van wat de getalswaarde geldt.

Kenmerkend is tabel 3.3 op bladzijde 58. In de kolom “Precisie deformatieschatting” staat voor waterpassing: “1-5 mm” én “1 mm/ $\sqrt{\text{km}}$ ”. De standaardafwijking van met waterpassing gemeten hoogteverschillen is evenredig met $\sqrt{\text{km}}$. Is het tweede getal de standaardafwijking van een gemeten hoogteverschil? Dat is iets anders dan een deformatieschatting²! Zeggen de eerste twee getallen “1-5 mm” wél iets over de deformatieschatting? Is het een standaardafwijking? En hoe wordt die schatting berekend? De leidraad geeft twee methoden (de wetenschappelijke literatuur kent overigens veel meer methoden):

1. puntsgewijze multi-epochendeformatieanalyse;
2. continue ruimte-tijddeformatieanalyse.

Van welke methode is uitgegaan bij het bepalen van de genoemde waarden van 1-5 mm?

Als het antwoord is, dat de getallen slechts een orde van grootte aangeven, biedt de tabel nauwelijks houvast voor het opstellen van normen en het toetsen daaraan.

In bijlage B (blz. 76) staat een van de weinige formuleringen, waarin de standaardafwijking³ een rol speelt: “Minder dan significant houdt in, dat de dalingssnelheid van het naburige punt ten opzichte van het stabiele punt minder dan 3-sigma van de geschatte snelheid is.”. Het woord “significant” komt in de leidraad vele malen voor. Niet duidelijk is, waarom alleen op blz. 76 het begrip nader is gespecificeerd.

1.4.2.3 Referentiepunt

In 2009 is in opdracht van de Technische Commissie Bodembeweging (TCBB) een onderzoek uitgevoerd naar “hoe we in Nederland kunnen komen tot een eensluidende aanpak voor het eenduidig vaststellen van bodemdaling door delfstofwinning”. In het eindrapport “Van Meting naar Daling” komt de door SodM aanbevolen werkwijze aan de orde. Er staat:

1. De SodM-methode gaat uit van berekening van de waterpasmetingen per epoche (per meetcampagne) onder aanname van één stabiel referentiepunt.
2. Het referentiepunt dient zorgvuldig te worden gekozen zodat het naar verwachting over de hele periode stabiel is.
3. De SodM-methode is een breuk met het verleden waarin het waterpasnetwerk werd aangesloten op meerdere, stabiel veronderstelde NAP-referentiepunten. In feite wordt niet meer de absolute bodemdaling t.o.v. NAP bepaald, doch slechts de relatieve beweging van de peilmerken onderling.

De leidraad lijkt de SodM-methode als uitgangspunt te hanteren. Het ene referentiepunt komt in de leidraad vele malen aan de orde. Toch zijn de bovenstaande drie punten in hun samenhang niet verdedigbaar. Men kan de verandering ten opzichte van een stabiel veronderstelde omgeving willen weten, óf men wil de verandering van het geo-object ten opzichte van zichzelf weten. In het *eerste geval* moeten verschillende punten worden gekozen, die de stabiel veronderstelde omgeving vertegenwoordigen. Eén punt is daarvoor onvoldoende, omdat er geen controle is en een beweging van het ene punt (ten opzichte van de stabiele omgeving) niet geconstateerd kan worden. In het *tweede geval* is er géén referentiepunt nodig, dat “zorgvuldig gekozen dient te worden en over de gehele periode stabiel is”. Men

²Als slechts één hoogteverschil wordt gemeten, is dat meteen ook de deformatieschatting. Als meer metingen worden gedaan, als in de tijd wordt geïnterpoleerd, als voor eigenbeweging van punten wordt gecorrigeerd, enz., geldt dat niet meer.

³De tekst spreekt over “3-sigma”. Met sigma wordt waarschijnlijk de standaardafwijking bedoeld, maar gedefinieerd is het niet.

moet *alle* punten, die het geo-object vertegenwoordigen, zorgvuldig kiezen. Natuurlijk moet voor de berekeningen wel schranking op één punt plaatsvinden, maar dat kan elk willekeurig punt zijn, eventueel een fictief punt, zoals het zwaartepunt. En het hoeft niet stabiel te zijn.

1.4.2.4 Analyse vrij-netwerkvereffening

Op bladzijde 23 van de leidraad worden twee methoden voor de deformatieanalyse genoemd:

1. Analyse Vrije netwerkvereffening (het betreft de vereffening van een vrij netwerk, dus lijkt de naam “vrij-netwerkvereffening” beter; niet de vereffening is vrij, maar het netwerk (vrij van aansluitingspunten));
2. Analyse Ruimte/Tijd.

Bij de eerste methode staat: “met bijvoorbeeld softwarepakket MOVE3 van Grontmij”. De huidige versie 4.3.0 van MOVE3 is een pakket dat deformatieanalyses kan uitvoeren met het waarnemingstype “verschuivingsvector” (zie par. 5.2). Maar op het moment van vaststelling van de richtlijn was het dat nog niet. MOVE3 kon een vrij-netwerkvereffening uitvoeren van een enkele epoeche. MOVE3 kon ook de metingen van meer epochen samenvoegen en een vereffening uitvoeren. De deformatieanalyse kon echter niet meer behelsen dan coördinaten leveren, waartussen coördinaatverschillen werden berekend (niet door MOVE3 overigens). Wat wordt met de “Analyse Vrije netwerkvereffening” precies bedoeld? MOVE3 kan wél coördinaten leveren inclusief de covariantiematrix. Daarmee kan in een apart programma heel goed een goede deformatieanalyse worden uitgevoerd, eventueel gelijkwaardig met de “Analyse Ruimte/Tijd”.

1.4.3 Havenbedrijf Rotterdam

1.4.3.1 Europese aanbesteding kademuur

Van Antea Group zijn de normen verkregen van een Europese aanbesteding door de gemeente Rotterdam voor deformatiemetingen aan kademuren. Aangenomen is dat deze aanbesteding openbaar is. Aangeleverd zijn de bijlagen 5, 6 en 7 van de aanbesteding. Helaas is een nadere specificatie van het document niet beschikbaar. Het document is van vóór december 2014.

In bijlage 7 (PvE Deformatiemeting kademuren en verwerking) staat:

De vereiste normkwaliteit is beschreven bij horizontale en verticale deformatiemetingen. Voor de kademuren wordt volstaan met een kwaliteitsklasse Middel. Het resultaat van de meting heeft de volgende kwaliteitskenmerken:

	Standaardafwijking	Relatieve precisie	Te detecteren verandering
XY (horizontaal)	4,0 mm	2,0 mm	Abs. 8,0 mm Rel. 4 mm
Z (verticaal)	2,0 mm	1,0 mm	Abs. 4,0 mm Rel. 2 mm

De deformatiepunten en vaste punten dienen overal te worden gemeten bij de horizontale meting. De te detecteren verandering wordt als volgt geïnterpreteerd:

Bij hermeting vallen de verschillen in 95% van de gevallen binnen de genoemde tolerantie (tolerantie = +/- 2 maal de standaardafwijking).

Commentaar:

1. “Standaardafwijking” en “Relatieve precisie”: Wat wordt hiermee bedoeld? Vermoedelijk is de waarde voor de relatieve precisie een standaardafwijking en wel relatief ten opzichte van iets dat vlakbij in de buurt is. De “Standaardafwijking” is vermoedelijk “absoluut” gedacht, d.w.z. ten opzichte van het landelijk referentiestelsel. Maar ook een dergelijke “absolute standaardafwijking” is in de operationele uitvoering altijd relatief. De absolute standaardafwijking is relatief ten opzichte van grondslagpunten, waarvan de coördinaten in het landelijk stelsel bekend zijn. Dan is de vraag: welke schrankingsbasis wordt (welke referentiepunten worden) voor de relatieve en welke voor de absolute precisie genomen? En hoe toets je of eraan is voldaan?
2. Waarom is men geïnteresseerd in de absolute standaardafwijking? Men wil in het algemeen weten, waar het gemeten object zich ongeveer bevindt. Is een standaardafwijking van bijvoorbeeld een

meter dan niet al heel mooi? Aansluiten op een basis van drie punten, die met GNSS op de mobiele telefoon is gemeten, zou kunnen volstaan.

Voor de deformatieanalyse heeft men een heel goede relatieve precisie (kleine standaardafwijking) nodig. De definitie daarvan (schrankingsbasis, toetsingsmethode) moet aandacht krijgen, niet de absolute precisie.

3. “Te detecteren verandering”: Waarschijnlijk wordt met “Abs.” een getal gegeven (8,0 mm) dat twee keer de “Standaardafwijking” is en met “Rel.” een getal (4,0 mm) dat twee keer de “Relatieve precisie” is. De factor twee komt van een tweezijdig kritiek gebied van de eendimensionale standaardnormale verdeling, waarbij een significantieniveau van 5% een kritieke waarde van 1,96 (afgerond: 2) geeft. Dit volgt uit de zin: “Bij hermeting ...”.

Maar XY is niet een-, maar tweedimensionaal. En een verandering bepaal je door *twee* keer de XY te bepalen en die van elkaar af te trekken. Het gaat dan om de standaardafwijking van dat verschil. De getalswaarden bij “Te detecteren verandering” (zowel XY als Z) kunnen daarom niet gelijktijdig met die voor de genoemde standaardafwijkingen als norm worden gesteld.

1.4.4 Overige casussen

Er is gekeken naar normstelling bij andere aanbestedingen: een kademuur in Utrecht, de Kiltunnel, spoordeformaties aan de HSL, enzovoorts. Het systematisch onderzoek daaraan heeft echter nog niet plaatsgevonden.

Hoofdstuk 2

Een normeringsmodel voor geodetische deformatieanalyse

2.1 Inleiding

In het voorgaande hoofdstuk is ingegaan op de huidige regelgeving en praktijk van geodetische deformatiemetingen (gdm). Daarbij is ook de huidige normgeving aan de orde gekomen. Duidelijk is geworden, dat het domein, waarin de gdm worden uitgevoerd, sterk bepalend is voor de gehanteerde analysemodellen en normering.

In dit hoofdstuk en de volgende hoofdstukken 3 en 4 wordt ingegaan op de te hanteren technieken voor geodetische deformatieanalyse en op de nauwkeurigheid, waarmee een deformatie kan worden bepaald. Daaruit volgt, hoe de technieken, en met name de nauwkeurigheid, kunnen worden genormeerd.

Het normeringsmodel wordt opgezet met de bedoeling, dat erop gebaseerde normen bruikbaar zijn als basis voor richtlijnen en voorschriften om opdrachten voor gdm te verstrekken. Opdrachten kunnen worden verstrekt door een opdrachtgever in een overheidsinstantie of bedrijf aan een opdrachtnemer, die in dezelfde instantie of hetzelfde bedrijf werkt. De opdrachtgever kan de leidinggevende of directe collega van de opdrachtnemer zijn. Ook kan de opdrachtgever de opdracht als een offerteaanvraag onderhands of via publieke aanbesteding formuleren. De opdrachtnemer is dan een ander bedrijf. Voor beide situaties moet het normeringsmodel toegepast kunnen worden. In het eerste geval, bij *interne* opdrachtverlening, is er meestal sprake van interne richtlijnen en voorschriften. Bij *externe* aanbesteding wordt er sneller gebruik gemaakt van bijvoorbeeld NEN-normen, de-facto-standaarden of expliciet voor de aanbesteding geformuleerde richtlijnen.

Het normeringsmodel is gedacht als basis voor het opstellen van normen, die zowel voor interne als externe opdrachtverlening gebruikt kunnen worden.

Het is wenselijk, dat de normen zodanig worden geformuleerd, dat de kwaliteit van de *producten* wordt genormeerd en niet het *proces* (o.a. de meettechniek) dat tot het product leidt. Of beter gezegd: de kwaliteit van het product is wat de opdrachtgever in het algemeen belangrijk vindt. De kwaliteit van het proces is daarvan een afgeleide. In die volgorde moet ook de normering plaatsvinden.

Als de mogelijkheid open moet worden gehouden om een deformatie met volstrekt verschillende meettechnieken te bepalen, kan men niet eisen: bepaal de hoogte- of positieverandering van die en die punten, of bepaal de veranderingen in de hoogte van die en die rastercellen. Dat legt immers vast, of beoordeelt, een bepaalde meettechniek. Het vastleggen van een object en diens geometrische wijzigingen in de tijd moet op meer algemene wijze worden geformuleerd.

Geodetische deformatie-analyse gaat over het analyseren van de vervorming, verandering van grootte of beweging van geo-objecten. Een *geo-object* is gedefinieerd als: “een object, waarvan alleen de geometrie beschouwd wordt. Het object bevindt zich op, onder of boven het aardoppervlak of is (een deel van) het aardoppervlak zelf, of (een deel van) de ondergrond”. Om de deformatie met een wiskundig model te kunnen beschrijven, moeten de geo-objecten en hun onderlinge relaties wiskundig worden

beschreven: een wiskundig model moet worden ingeschakeld. In het wiskundige model komen parameters voor, waarvan de waarden bepaald moeten worden. Door het uitvoeren van metingen probeert men een eindig aantal van deze parameters te bepalen. Hierdoor worden de geo-objecten “gediscretiseerd”. Een metingstype (waterpassing, GNSS, satellietradarinterferometrie, laserscanning, enz.) is meer of minder geschikt om de parameters van een bepaalde discretisatie te bepalen. Zo is waterpassing heel geschikt om van tevoren in, op of aan het geo-object verzekerde bouten in hoogte te bepalen. De bouten zijn een discretisatie van het geo-object. GNSS is minder geschikt om de bouten aan te meten, als die bijvoorbeeld in een muur zijn geplaatst en satellietradarinterferometrie “ziet” de bouten meestal niet eens. Satellietradarinterferometrie en laserscanning zijn in staat over een groot oppervlak een hoge dichtheid aan punten in korte tijd op te meten. Een discretisatie met oppervlakte-elementen, zoals een Delauneytriangulatie, of een raster van gelijke cellen, is voor deze meettechnieken veel geschikter.

In de volgende paragraaf wordt ingegaan op wat het *product* van een geodetische deformatieanalyse is. Om dat product te realiseren, is de discretisatie van de werkelijkheid in een wiskundig model nodig. In paragraaf 2.3 wordt hierop nader ingegaan. In paragraaf 2.4 wordt het gebruik van geodetische modellen en andere modellen onder de loep genomen en wordt het belang van een juiste vastlegging van de nauwkeurigheid van resultaten behandeld. In paragraaf 2.5 tenslotte wordt het normeringsmodel voor geodetische deformatieanalyse gepresenteerd.

2.2 Product van geodetische deformatieanalyse

Het product van een geodetische deformatieanalyse is een verzameling van uitspraken over het *deformatiepatroon* van een geo-object. De functie van de uitspraken is het leveren van onderbouwingen voor uitspraken over de *risico's* van menselijk handelen ten aanzien van het betreffende geo-object. Altijd moeten de uitspraken over het deformatiepatroon de uitspraken over de risico's mogelijk maken. Afhankelijk van de opdracht zijn de uitspraken over de risico's al dan niet een onderdeel van de geodetische deformatieanalyse.

Het deformatiepatroon van geo-objecten is de verandering in de tijd van de geometrie van die objecten. Het betreft de verandering van de vorm en grootte van geo-objecten en hun positie en oriëntatie ten opzichte van elkaar. Om het deformatiepatroon vast te leggen moet een wiskundig model worden ingeschakeld en de parameters van dat model moeten worden vastgesteld op basis van metingen. Als het model is ingeschakeld en de parameters zijn vastgesteld, moet het deformatiepatroon worden gepresenteerd. Dat kan door de waarden van de parameters uit te lijsten en dat kan door een grafische voorstelling in een grafiek of een 3D-visualisatie, eventueel geanimeerd, te maken.

De uitspraken over het deformatiepatroon betreffen allereerst het geven van informatie over het gehanteerde wiskundige model en de parameters van het deformatiepatroon. Duidelijk moet daarbij naar voren komen, dat het gehanteerde wiskundige model een *keuze* is en eventuele alternatieven en de onderbouwing van de keuze moeten worden gegeven.

De uitspraken over het deformatiepatroon betreffen vervolgens de *precisie* en *betrouwbaarheid* (volgens de geodetische definitie van die begrippen (Polman & Salzmänn, 1996)) van het patroon.

Uitspraken kunnen worden gedaan over het al dan niet overschrijden van het deformatiepatroon van vooraf gestelde *toleranties*. Dergelijke uitspraken moeten altijd vergezeld gaan van de *waarschijnlijkheid* van het overschrijden, met een statistische onderbouwing van de gegeven waarschijnlijkheid.

Tenslotte kunnen uitspraken worden gedaan over de *voorspelling* van het deformatiepatroon in de toekomst, inclusief de precisie en betrouwbaarheid van de voorspelling.

2.3 Analysemodel

Om tot normering van gdm te komen is het nodig te weten hoe gdm worden geanalyseerd. Daarom wordt in deze paragraaf beschreven, hoe een analysemodel voor gdm eruit kan zien. In paragraaf 2.5 komt het normeringsmodel aan de orde.

2.3.1 Parameter- en waarnemingsruimte

Het vaststellen van het deformatiepatroon, waaraan geo-objecten onderworpen zijn, vergt het inschakelen van een wiskundig model, dat parameters bevat, waarvan de waarden bepaald moeten worden. Die parameters zijn bijvoorbeeld de coördinaten van punten, waarmee de geo-objecten zijn gediscrèteiseerd, de veranderingen van die coördinaten in de tijd, de coëfficiënten van een reeksontwikkeling die de puntbeweging beschrijft en dergelijke. Om de parameters te bepalen worden metingen uitgevoerd, die *waarnemingen* opleveren. Om de parameters uit de waarnemingen te berekenen wordt hier ervan uitgegaan, dat de methode van de kleinste kwadraten wordt gebruikt. Het model van waarnemingsvergelijkingen (A-model, tweede standaardvraagstuk, Gauss-Markovmodel) kan met de kleinste-kwadratenmethode worden opgelost. Dit model beschrijft de relaties tussen waarnemingen en parameters. De waarnemingen en parameters kunnen worden opgevat als vectoren in de waarnemingsruimte respectievelijk de parameterruimte.

Vereffenen is loodrecht projecteren in de waarnemingsruimte Meestal bestaat het model uit niet-lineaire vergelijkingen, die gelineariseerd worden. Het vereffenen volgens de kleinste-kwadratenmethode kan worden geïnterpreteerd als het loodrecht projecteren in de waarnemingsruimte van de waarnemingsvector op de deelruimte die wordt bepaald door de kolommen van de modelmatrix. Daarbij wordt het begrip “loodrecht” gedefinieerd met de *metriek* van de waarnemingsruimte, die wordt bepaald door de covariantiematrix van de waarnemingen.

Niet oplosbare parameters: rangdefect De middelbareschoolwiskunde leert dat een stelsel lineaire vergelijkingen oplosbaar is, als het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal op te lossen parameters. Dit geldt overigens alleen als de vergelijkingen niet lineair afhankelijk van elkaar zijn. In de context van waarnemingen en parameters betekent het, dat als er even veel waarnemingen als parameters zijn, de parameters eenduidig bepaald kunnen worden. Zijn er meer waarnemingen dan parameters, dan is er in het algemeen geen eenduidige oplossing en wordt de kleinste-kwadratenmethode ingezet om tot een oplossing te komen. Het kan ook gebeuren, dat één of meer parameters niet oplosbaar zijn, ondanks het aanwezig zijn van voldoende waarnemingen. Een voorbeeld: een huis is rechthoekig en je meet de lengte van de voorgevel en de lengte van de achtergevel. Je wilt weten wat de lengte van de voorgevel en de lengte van de zijgevel is. Je hebt twee waarnemingen en twee parameters, maar de lengte van de zijgevel kun je niet bepalen. Dit lijkt flauw, maar een probleem kan al gauw zo complex zijn, dat het niet meteen opvalt, dat een bepaalde parameter niet oplosbaar is. Dit uit zich in een *rangdefect* van de modelmatrix. Het vereffeningspakket zal aangeven, dat er een rangdefect is, of dat de *normaalmatrix* singulier en niet inverteerbaar is, of dat de waarnemingen lineair afhankelijk zijn. Een analyse van de parameterruimte moet in dat geval duidelijk maken, wat er aan de hand is.

Schranking Het bepalen van coördinaten vanuit geodetische waarnemingen, zoals afstands- en richtingsmetingen en waterpassingen, veroorzaakt het rangdefect, dat de ligging van de oorsprong van het referentiestelsel, de oriëntering van de coördinaatassen en eventueel de schaal niet uit de metingen bepaald kunnen worden. Dit wordt opgelost door aan te sluiten op een voldoende aantal aansluitingspunten, waarvan de coördinaten al bekend zijn. Dit heeft echter nadelen. De precisie en de betrouwbaarheid van de aansluitingspunten beïnvloeden de berekeningen. Zeker bij deformatiemetingen is het aannemelijk, dat de eigen metingen preciezer en betrouwbaarder zijn dan de aansluitingspunten. Het aansluiten aan aansluitingspunten wordt daarom bij geodetische deformatieanalyse afgeraden. Om het rangdefect toch op te lossen, worden voor de oorsprong, de oriëntering en eventueel de schaal van het coördinatenstelsel willekeurige waarden genomen. Daarvoor kunnen wel de coördinaten van aansluitingspunten worden gebruikt, maar het aantal mag niet meer zijn dan het rangdefect groot is.

Het kiezen van willekeurige waarden om een rangdefect van de modelmatrix op te lossen, heet het *schransen* van de parameters. Als men later wil overstappen naar een oplossing van de parameters, die gebaseerd is op een andere keuze van de willekeurige waarden, gebruikt men een *schransingstransformatie*. Voor een goede geodetische deformatieanalyse is het belangrijk dat die invariant is voor een schransingstransformatie: de berekende waarden waarop de analyse is gebaseerd, mogen niet wijzigen door een schransingstransformatie. De schransing is immers gebaseerd op een willekeurige keuze en niet op waarnemingen.

2.3.2 Hypotheses toetsen

Toetsingshypotheses zijn hypotheses over de parameterruimte Nadat is bepaald welk model gebruikt gaat worden om de deformatie te analyseren en nadat waarnemingen zijn vergaard om de parameters te berekenen, wordt een kleinste-kwadratenvereffening uitgevoerd. Daaruit volgen vereffende waarnemingen die enigszins afwijken van de gemeten waarnemingen. Als evenwel de door de kleinste-kwadratenmethode geschatte afwijkingen aan de grote kant zijn, moet de conclusie zijn, dat de waarnemingen niet bij het model passen; of andersom, dat het model niet bij de waarnemingen past, wat op hetzelfde neerkomt. Welk criterium moet worden gehanteerd voor “aan de grote kant”? De toetsingstheorie (Teunissen, 2006) geeft hier antwoorden op. De “algemene toets van het model” is de generieke toets die voor het hele model en alle waarnemingen een uitspraak doet over het “passen”. Als de toets tot verwerping van het model leidt, d.w.z. dat het model niet bij de waarnemingen past, moet gezocht worden naar een beter model. Daarvoor worden ook toetsen uitgevoerd. De hier aangehouden methode wordt beschreven in paragraaf 4.5.4. Het oorspronkelijke model wordt de *nulhypothese* genoemd en een verbeterd model de *alternatieve hypothese*. De alternatieve hypothese is de nulhypothese met een aantal extra parameters, en bijgevolg een vergrote modelmatrix. De vraag is welke extra parameters nodig zijn. Verschillende opties voor extra parameters worden getoetst en de beste alternatieve hypothese bepaald. Het toetsen van het model kan daarom worden geïnterpreteerd als het het bepalen welke uitbreiding van de parameterruimte het beste past bij de waarnemingen. Het opstellen van toetsingshypotheses komt neer op het opstellen van hypotheses over parameterruimte.

Deformatiehypotheses zijn toetsingshypotheses In de hoofdstukken 3 en 4 wordt ingegaan op modellen, die gebruikt kunnen worden voor het toetsen van deformatiehypotheses. De aanpak is het opstellen van nul- en alternatieve hypotheses en het toetsen daarvan. De nulhypothese is vaak de hypothese dat er geen deformatie is, maar kan ook een eenvoudige deformatiehypothese omvatten. De alternatieve hypothese formuleert een (complexere) deformatie, bijvoorbeeld dat een punt van positie is veranderd. De aan de parameterruimte toe te voegen parameters zijn de onbekende verschuivingen in x -, y - en z -richting. Een alternatieve hypothese kan ook zijn, dat een aantal punten een periodieke beweging ondergaat, die zichtbaar is in de positie van die punten gedurende een groot aantal epochen. De extra toe te voegen parameters zijn in dit geval bijvoorbeeld de coëfficiënten van een Fourierreeksontwikkeling, die de periodieke beweging beschrijft.

2.3.3 Waarnemingen zijn modelafhankelijk

Elke meting ontstaat uit een complex meetproces, waarin veel veronderstellingen over de werkelijkheid zijn opgenomen: een “objectieve” waarneming, d.w.z. een waarneming zonder subjectieve invloed van de waarnemer en zonder invloed van diens veronderstellingen over wat hij meet, is niet mogelijk. Het uitvoeren van metingen, ze vereffenen en conclusies trekken uit de vereffeningresultaten en die pas dan confronteren met voorspellingen van anderen over wat is gemeten levert niet een betrouwbare, onafhankelijke vergelijking. Zoals de filosoof Karl Popper het stelde: “Observation is always observation in the light of theories” (Popper, 1972, hoofdstuk 3): waarnemingen zijn modelafhankelijk. Dat betekent, dat de waarneming het resultaat is van het inschakelen van een model. De voorspellingen van anderen zijn ook gebaseerd op modellen. Het combineren van al deze modellen resulteert in het veranderen (een vereffeningproces) van de individuele modellen. Dus moet ook het waarnemingsmodel, en dus de interpretatie van de waarnemingen, worden aangepast.

2.3.4 Discretisatie van een geo-object

2.3.4.1 Elementaire locatie-indicatoren

Voor het bouwen van een model voor geodetische deformatieanalyse moeten de bestudeerde geo-objecten worden gediscrètiseerd. Discretisatie vindt plaats met wat hier aangeduid wordt als de *elementaire locatie-indicatoren*. Zij kunnen zijn:

1. punten, gerepresenteerd door coördinaten ten opzichte van een referentiestelsel;
2. lijnen;

3. vlakken,
 - door een puntenwolk heen bepaald;
 - gekromd, bijvoorbeeld een cilinder (bijv. tunnel);
 - plat;
4. driehoeken, bijvoorbeeld Delauneydriehoeken;
5. pixels (2D);
6. voxels (3D);
7. enzovoorts.

De tijdafgeleiden van de elementaire locatie-indicatoren (de snelheid en versnelling) kunnen belangrijk zijn om in het model van een geodetische deformatieanalyse op te nemen.

2.3.5 Trend, signaal en ruis

Om het deformatiepatroon te analyseren splitst het analysemodel het patroon in drie delen.

1. **Trend:** het deformatiepatroon, zoals dat beschreven wordt door wiskundige, analytische functies; bijv. een verzakking van een punt, lineair in de tijd; of een verschuiving van een aantal punten, die afzwakt in de tijd, te beschrijven met een logaritmische functie; of géén deformatie.
2. **Signaal:** lokale afwijkingen van het deformatiepatroon (lokaal in de ruimte of in de tijd), waarvan men de vorm niet kent, of waarvan de vorm zeer grillig is, en die men daarom niet met een analytische functie kan beschrijven. Wel weet men, dat die afwijkingen kunnen voorkomen en heeft men een idee van de grootte die zij gemiddeld en maximaal kunnen aannemen ten opzichte van nabijgelegen (in de ruimte of in de tijd) andere delen van het geo-object. Dat “idee” wordt gekwantificeerd met een *covariantiefunctie* of een variogram. Het bepalen van de parameters van de covariantiefunctie is vaak niet eenvoudig. Het normeringsmodel kan hier opties schetsen en aangeven, welke informatie en parameters in ieder geval expliciet gemaakt moet(en) worden. Het wordt aanbevolen om sensitiviteitsanalyses te gebruiken. Een sensitiviteitsanalyse bekijkt hoe de conclusies van de analyse wijzigen bij wijziging van de covariantiefuncties en hun parameters.
3. **Ruis:** zowel de waarnemingsruimte als de parameterruimte passen niet perfect bij de werkelijkheid, zoals we die waarnemen; de waarnemingen wijken af van de verwachte waarden door *meetruis* en de parameters wijken af van de verwachte waarden door *systeemruis*; zowel meetruis als systeemruis kunnen vaak weer in delen worden gesplitst, die de verschillende oorzaken van de ruis vertegenwoordigen: verschillende onderdelen van het meetproces; verschillende oorzaken van deformatie.

De ruis probeert men zo veel mogelijk te verwijderen uit de beschrijving van het deformatiepatroon.

2.3.6 Analyse van een epoche en tijdreeksanalyse

De analyse van een epoche en die van een tijdreeksanalyse zijn twee verschillende dingen. Een epoche is een enkel tijdstip of een korte tijdsperiode (kan evenwel uren, dagen of maanden lang zijn), waarop metingen zijn gedaan, die als een samenhangende eenheid worden gezien. Voor een epoche wordt een vereffeningsmodel opgesteld, dat wordt vereffend en getoetst en waarvoor een kwaliteitsbeschrijving wordt uitgevoerd. In Nederland wordt hiervoor vaak het pakket MOVE3 ingezet.

Een tijdreeks is de verzameling van waarnemingen van opeenvolgende epochen. De tijdreeksanalyse, ook als die slechts twee epochen omvat, is een aparte stap, die als een aparte vereffening, toetsing en het trekken van conclusies moet worden aangepakt. MOVE3 is sinds versie 4.2.0 geschikt voor een eenvoudige tijdreeksanalyse volgens de kleinste-kwadratenmethode, zie paragraaf 5.2.

Bij continue metingen lijkt het moeilijk om epochen te onderscheiden. Dat is wél mogelijk voor bijvoorbeeld een total station, dat continu aan het meten is. Als een total station twintig minuten bezig is om alle punten een keer te meten en daarna begint het direct aansluitend opnieuw, dan vormen die twintig minuten aan metingen een epoche. Elke epoche wordt apart vereffend en getoetst. Het geheel van alle epochen samen wordt ook vereffend en getoetst. Bij de laatste toetsing wordt het deformatiepatroon getoetst.

2.4 Gebruik van het analysemodel

2.4.1 Typen deformatieanalyse

Twee typen deformatieanalyse komen in de praktijk van gdm voor:

1. Stabiliteitsanalyse: men verwacht geen verandering en wil monitoren of er ook daadwerkelijk geen verandering is. De stabiliteitsanalyse is vaak iets “losser” geformuleerd: men verwacht deformaties, maar zolang die binnen zekere marges blijven (fluctuaties rond nul), is geen actie nodig.
2. Voorspelling: men verwacht deformaties en kan enigszins voorspellen (op basis van niet-geodetische metingen; geomechanische, bouwmechanische metingen, constatering en ervaringen) hoe groot die zullen zijn, maar wil weten of de voorspellingen uitkomen en bovendien: men wil op grond van de geodetische metingen voorspellen hoe groot de deformaties in de toekomst zullen zijn.

2.4.2 Geodetische en andere modellen

Het geodetische meetproces is in zichzelf het opstellen van een model van de werkelijkheid, het doen van waarnemingen met meetapparatuur en het koppelen van de waarnemingen aan het (geodetische) model. Het geodetische model en het model van de opdrachtgever (de aannemer, Rijkswaterstaat, de mijnbouwmaatschappij, het waterschap, enz.) moeten op elkaar aansluiten en geen onderlinge tegenstrijdigheden bevatten. In de mijnbouw kunnen zowel het (geomechanische) model van de opdrachtgever (beschrijft de geofysische processen in de ondergrond) als het (geodetische) model van de landmeter vrij complexe, wiskundige modellen zijn. In de meeste andere domeinen zijn beide modellen vaak niet eens als zodanig herkenbaar (niet expliciet gemaakt).

2.4.3 Interpretatie van metingen

In de praktijk van de deformatieanalyse komt men de houding tegen van degene, die de gdm uitvoert (geodeet, landmeter), dat hij metingen levert en dat de interpretatie ervan voor de opdrachtgever is. Daar zijn drie bezwaren tegenin te brengen:

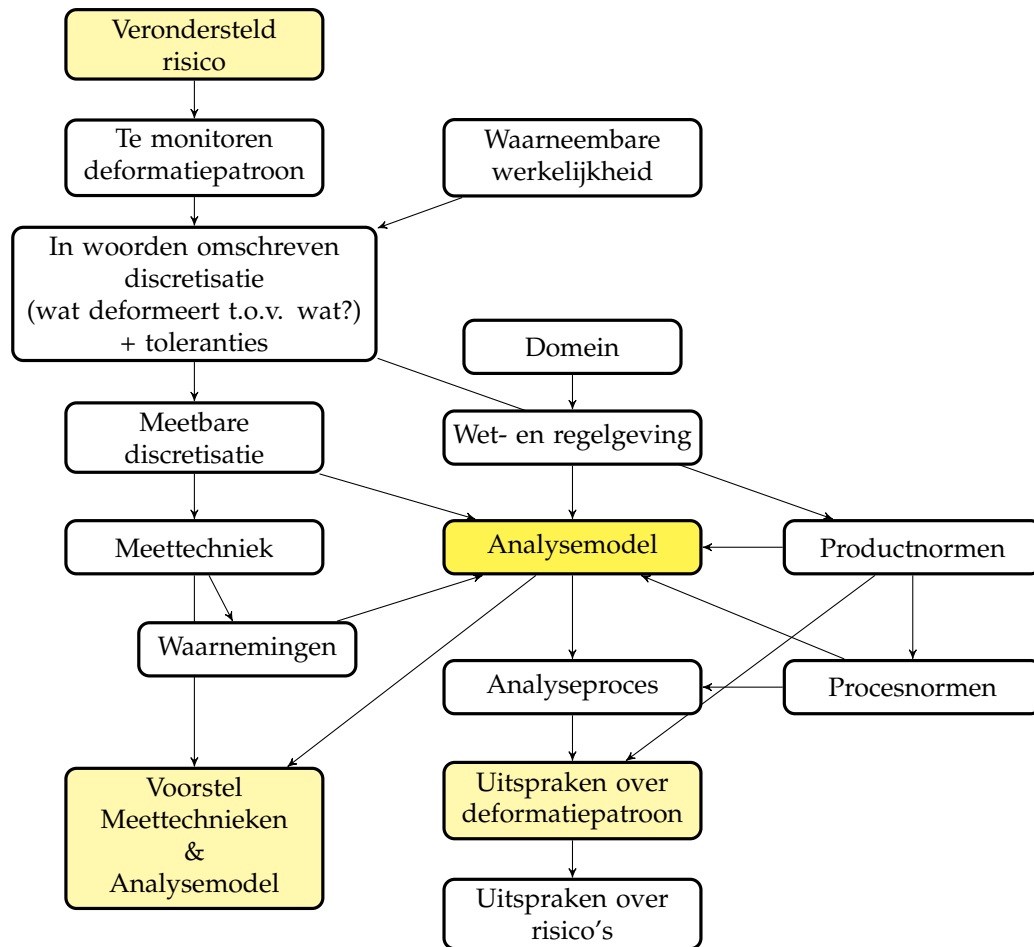
1. Aansluitend op het gestelde in paragraaf 2.3.3: metingen kunnen nooit los staan van dat wat gemeten wordt. De meting en de interpretatie ervan zijn onlosmakelijk met elkaar verbonden.
2. Beschouw de metingen als ruwe grondstof en de interpretatie ervan als het bewerken van de ruwe grondstof. Bewerkte grondstof heeft een hogere waarde.
3. De opdrachtgever, ook al is hij technisch geschoold en heel slim: het ontbreekt hem of haar in het algemeen aan de geodetische kennis om de metingen naar waarde te schatten.

De geodetische kennis over de metingen en het analysemodel en de kennis van de opdrachtgever of diens specialisten over oorzaken en verloop van deformaties van het geo-object moeten worden gecombineerd om tot een goede geodetische deformatieanalyse te komen.

2.5 Normeringsmodel

Het analysemodel, dat in de voorgaande paragrafen is beschreven en dat verder wordt uitgewerkt in de hoofdstukken 3 en 4, is de kern van het normeringsmodel voor geodetische deformatieanalyse. Het gehele model is weergegeven in figuur 2.1.

In woorden omschrijven Het uitgangspunt is het veronderstelde risico, waarvoor het nodig wordt geacht deformatiemetingen te gaan uitvoeren. Met de metingen wordt het deformatiepatroon bepaald en daarmee wordt een inschatting van het risico gemaakt. Om het deformatiepatroon te bepalen wordt de werkelijkheid, zoals we die waarnemen, in woorden omschreven. Het deformatiepatroon wordt daarbij omschreven door te formuleren wat ten opzichte van wat deformeert (beweegt, verschuift, roteert,



Figuur 2.1: Normeringsmodel

tordeert, enzovoorts). De omschrijving moet dus steeds *relatief* zijn. Alleen een relatieve deformatie kan goed worden genormeerd. Een omschrijving als: “bepaal of dit object beweegt” is niet eenduidig. Het kan iets zijn zoals: “bepaal of dit object beweegt ten opzichte van dat andere object”. Concreter voorbeeld: “bepaal of de afgezonden tunnel beweegt ten opzichte van de beide oevers”. In dit voorbeeld kan het nodig zijn, de formulering specifieker te maken, omdat de oevers onderling ten opzichte van elkaar kunnen bewegen en een oever over een lengte van een paar honderd meter ook interne bewegingen kan ondergaan. De opdracht kan ook zijn om te bepalen of de tunnel interne spanningen vertoont. In dat geval kan de omschrijving zijn: “bepaal of de tunnelonderdelen, die door voegen van elkaar gescheiden zijn, ten opzichte van elkaar bewegen”, of “bepaal of de tunnelonderdelen intern onderhevig zijn aan vervormingen, zoals torsie of dilatatie”.

De omschrijving kan al kwantificeringen van de deformaties omvatten, zoals: “bepaal of de verschuiving van dit object ten opzichte van dat object onder de 5 mm blijft”. De 5 mm is een *tolerantie*, die verderop in het model wordt uitgewerkt in grenswaarden voor specifieke statistische grootheden die betrekking hebben op specifieke elementaire locatie-indicatoren.

Een formulering als: “Bepaal de verandering in RD-coördinaten van de in de bijlage genoemde verzekeringsbuizen in de komende drie weken” is in het algemeen onjuist om vier redenen:

1. De relatieve deformatie die wordt bepaald is de deformatie van de verzekeringsbuizen ten opzichte van het RD-stelsel, zoals dat is vastgelegd door eerste- en tweedeordepunten. Er waren metingen van anderen en bewerkingstappen nodig om de RD-coördinaten van de aansluitingspunten te krijgen, waarvan vaak niet bekend is hoe die zijn uitgevoerd. Er is een aanmerkelijk risico, dat de kwaliteit van de uit te voeren deformatiemetingen verslechterd zal worden door de aansluiting aan RD.
2. Is de verandering in RD wel wat de opdrachtgever wil weten? De RD-aansluitingspunten kunnen

op grotere afstand van het deformerende geo-object liggen en kunnen zelf aan deformaties en administratieve correcties onderhevig zijn, die voor de huidige opdracht er niet toe doen en het beeld van het nu te bepalen deformatiepatroon kunnen vertroebelen.

3. Niet aangegeven is, welke aansluitingspunten moeten worden gebruikt. De formulering gaat van de hypothese uit, dat er slechts één RD-stelsel is. Dat geldt wel voor de theoretische definitie, maar niet voor de operationele definitie, zoals die gerealiseerd wordt door de concrete RD-punten, waarop wordt aangesloten.
4. De verzekeringsbuizen zijn een discretisatie van het geo-object. Het geo-object kan in meer algemene termen worden omschreven, die ook andere discretisaties mogelijk maken, waardoor mogelijk andere meettechnieken ingezet kunnen worden.

RD-coördinaten kunnen handig zijn om te weten, waar in Nederland zich de punten bevinden. Het afbeelden van de punten op een kaart, fotobeeld of satellietopname wordt daarmee eenvoudig. Er is niets op tegen om van de punten RD-coördinaten vast te leggen, of om een benaderde aansluiting aan RD uit te voeren, zolang het maar geen gedwongen aansluiting is (in MOVE3: “pseudo-kleinste-kwadratenvereffening”, “vaste aansluitingsvereffening”).

Meettechniek en discretisatie Het in woorden omschrijven van het te bepalen deformatiepatroon is al een vorm van discretisatie. Het zal in het algemeen worden gedaan door de opdrachtgever en opdrachtnemer samen. De volgende stap is het vaststellen welke meettechnieken geschikt zijn om het deformatiepatroon te bepalen. Dit wordt door de opdrachtnemer gedaan. De meettechniek bepaalt de meest geschikte discretisatie van de te monitoren geo-objecten. Hij bepaalt ook de waarnemingen die gedaan zullen worden.

Wet- en regelgeving In het domein, waarin deformatieanalyse wordt uitgevoerd, geldt specifieke wet- en regelgeving. Bepaald wordt, welke eisen aan de meettechniek en het analysemodel worden gesteld om aan de wet- en regelgeving te voldoen.

Analysemodel en normen Vanuit de voorgestelde meettechnieken en de wet- en regelgeving wordt een analysemodel opgesteld. Uit het analysemodel volgt welke productnormen en procesnormen worden gehanteerd. De productnormen worden geformuleerd in de termen en grootheden, zoals die in dit rapport zijn uitgewerkt, met name in de hoofdstukken 3 en 4.

Analyseproces Het analyseproces kan lang duren. Als eerst een nulmeting wordt uitgevoerd, wordt die geanalyseerd. Bij de eerste herhalingsmeting vindt de volgende fase van de analyse plaats en bij elke volgende herhalingsmeting vindt verdere analyse plaats. De procesnormen volgen uit de productnormen en worden gebruikt om het proces in de gaten te houden.

Uitspraken Uitspraken over het deformatiepatroon worden gedaan op basis van het analyseproces. Bij de eerste herhalingsmeting en de stand van het analyseproces op dat moment worden de eerste uitspraken gedaan.

Op basis van de uitspraken over het deformatiepatroon worden uitspraken over de risico's gedaan.

Product- en procesnormen De productnormen en de daarvan afgeleide procesnormen moeten eenduidig zijn geformuleerd in de termen en grootheden, die in dit rapport worden uitgewerkt. In het algemeen zijn deze normen te specialistisch geformuleerd om door de gemiddelde opdrachtgever doorgrond te kunnen worden. Er zijn twee aanpakken mogelijk.

1. De opdrachtnemer werkt de normen zelf zodanig uit, dat ze eenduidig zijn geformuleerd. Hij schrijft vervolgens op basis van de normen en het analysemodel een *voorstel voor het kiezen van de meettechniek en het analysemodel*. Dit voorstel moet zodanig zijn geformuleerd, dat de opdrachtgever ermee uit de voeten kan. De opdrachtgever moet het voorstel goedkeuren, zodat het ten

uitvoer kan worden gebracht. De opdrachtgever kan externe specialisten inschakelen om te controleren, dat de opdrachtnemer op juiste wijze de product- en procesnormen heeft geformuleerd en dat hij zich eraan houdt.

2. In het domein of door de opdrachtgever zijn voor verschillende discretisaties en meettechnieken productnormen en daarvan afgeleide procesnormen opgesteld voor gebruik voor meer projecten gedurende langere tijd. Deze product- en procesnormen worden door de opdrachtnemer gebruikt bij het opstellen van het analysemodel. Ook nu stelt de opdrachtnemer een voorstel op voor het kiezen van de meettechniek en het analysemodel. De opdrachtgever keurt het voorstel goed, waarna de uitvoering kan starten. De opdrachtgever kan externe specialisten inschakelen om te controleren, dat de opdrachtnemer zich aan de normen houdt bij de uitvoering van de deformatieanalyse.

Hoofdstuk 3

Analyse van hoogteveranderingen

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt ingegaan op de precisie, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van gemeten hoogteveranderingen. Om de gedachten te bepalen wordt als voorbeeld genomen het bepalen van hoogtes door waterpassing en het bepalen van hoogteveranderingen door de verschillen te nemen van hoogtes op twee tijdstippen gemeten.

Uitgaande van een zeer eenvoudige situatie - één punt, waarvan de hoogte bekend is op twee tijdstippen - wordt getoond wat de begrippen standaardafwijking, grenswaarde en tolerantie betekenen. Aan de hand van een iets uitgebreider voorbeeld - drie punten, waartussen hoogteverschillen zijn gemeten - wordt getoond, waarom correlatie en schranke zo belangrijk zijn en wat er gebeurt als je die verwaarloost. Dan wordt ook duidelijk, dat het in de meeste praktijksituaties onverstandig is om een analyse van de hoogteverandering van slechts één punt uit te voeren: er kan niet worden geschrinkt. Het punt voor punt uitvoeren van de analyse - veel toegepast in de praktijk - is daarom onverstandig.

Alle beschreven situaties worden benaderd als een vereffeningsprobleem, dat volgens de methode van de kleinste kwadraten wordt opgelost. Het voordeel daarvan is de uniforme aanpak en de eenduidige definitie van de gehanteerde begrippen. De analyse van één punt en zijn hoogte wordt echter begonnen met een statistische analyse zonder gebruik te maken van de kleinste-kwadratenmethode.

3.2 Eén hoogte op twee tijdstippen

Veronderstel dat we de hoogte van een punt B op een zeker tijdstip (1) kennen: $h_B^{(1)}$. Veronderstel, dat we ook de precisie ervan kennen en wel door middel van de standaardafwijking $\sigma_{h_B^{(1)}}$. We nemen als standaardafwijking 1 mm. Tenslotte kennen we ook de hoogte van hetzelfde punt op een later tijdstip (2) en de standaardafwijking ervan: $h_B^{(2)}$ en $\sigma_{h_B^{(2)}}$. Ook nu is de standaardafwijking 1 mm. De hoogteverandering t is:

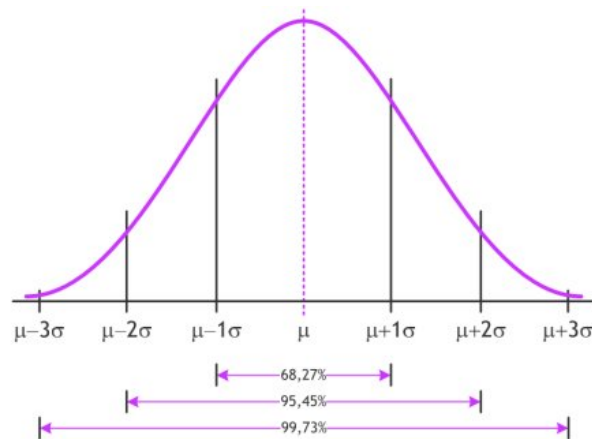
$$t = h_B^{(2)} - h_B^{(1)} \quad (3.1)$$

Het verschil t is de *nulgrootheid*, zo genoemd, omdat het verschil in principe nul is. We veronderstellen dat de beide hoogtes normaal verdeeld zijn (de kansverdeling van Gauss-Laplace volgen, zie figuur 3.1).

3.2.1 Standaardafwijking van de verandering

Laten we aannemen, dat beide hoogtes niet gecorreleerd zijn, omdat ze bepaald zijn in twee geheel van elkaar onafhankelijke meetprocessen. Voor de standaardafwijking van t geldt dan:

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_{h_B^{(1)}}^2 + \sigma_{h_B^{(2)}}^2} = \sqrt{2} \text{ mm} \quad (3.2)$$



Figuur 3.1: De verdeling van Gauss-Laplace (bron: www.eenblogjeom.nl)

3.2.2 Toetsing van de verandering

We definiëren nu de variabele w als:

$$w = \frac{t}{\sigma_t} = \frac{1}{2} \sqrt{2} t \quad (3.3)$$

De standaardafwijking van w is 1 en de verwachtingswaarde (het “gemiddelde”) is 0. Het is dus een standaardnormaal verdeelde variabele.

De berekende waarde van w kan erop worden getoetst, of de waarde binnen de te verwachten meetruis valt, of dat de waarde zo groot is, dat een significante afwijking van de ene hoogte ten opzichte van de andere hoogte verwacht mag worden: er is een deformatie. De toetsing is eenvoudig: als de absolute waarde van w groter is dan 1,96 (afgerond wordt vaak 2 genomen), dan is er een significante afwijking. De waarde van 1,96, de kritieke waarde genoemd, is bepaald op grond van een kans van 5% op een fout van de eerste soort. Anders gezegd: het significantieniveau (aangeduid met α) is 5%.

In de geodesie wordt het significantieniveau van 5% meestal verlaagd tot 0,1% (1 promille) vanuit de idee, dat er zorgvuldig wordt gemeten en dat het verwerpen van waarnemingen pas bij uiterste noodzaak moet worden gedaan. Omdat bij geodetische deformatiemetingen dit ook mag worden verondersteld, wordt hier van 0,1% uitgegaan. Dat betekent, dat de kritieke waarde van 1,96 wordt verhoogd tot 3,29.

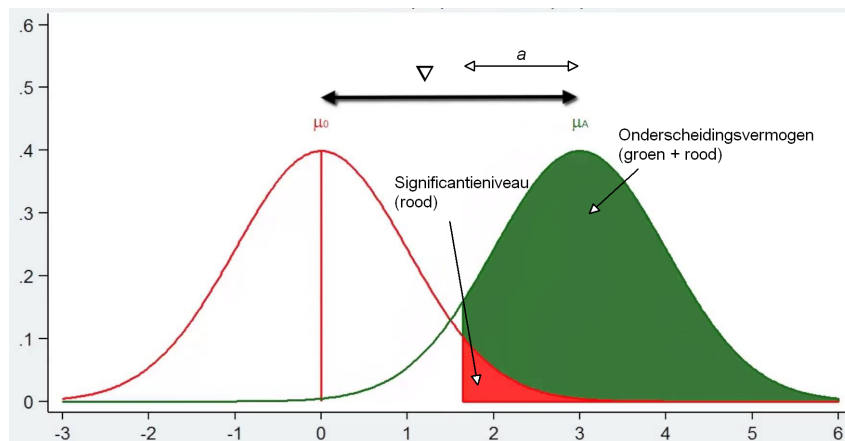
Als w in absolute waarde groter is dan 3,29 wordt geconcludeerd dat een deformatie is opgetreden. Dat betekent dat t dan groter is dan $\sqrt{2} \cdot 3,29 = 4,65$ mm. Dat is bijna vijf keer de standaardafwijking van 1 mm van een enkele hoogte!

3.2.3 Grenswaarde

De waarde van 4,65 mm is de kritieke waarde, maar het is niet de waarde van de deformatie, die kan worden gedetecteerd met deze methode. Die waarde is groter. Het wordt toegelicht aan de hand van figuur 3.2. In deze figuur staan twee “hoedjes”. Het linker hoedje is de kansdichtheidsfunctie van w als er géén deformatie (of andere afwijking) is. Als er wel een deformatie is, is het hoedje verschoven naar rechts. De verandering van w door de deformatie is ∇ (uitgesproken als ‘nabla’) en is het verschil tussen het midden van het linker- en het rechterhoedje.

De *nullhypothese* is de hypothese, dat het linkerhoedje de situatie juist beschrijft: er is geen deformatie. Het rechterhoedje beschrijft de *alternatieve hypothese*: er is een deformatie. We toetsen de alternatieve hypothese tegen de nullhypothese door een kritieke waarde te kiezen, in dit geval 3,29, en te kijken, of de gemeten waarde van w daarboven komt.

Hoe groot is de kans op een fout van de eerste soort? Dat is de kans, dat we *ten onrechte* de nullhypothese verwerpen. Die kans is 0,1%, het significantieniveau, en is in figuur 3.2 de grootte van de oppervlakte



Figuur 3.2: Onderscheidingsvermogen (bron: blog.stata.com)

onder de functie rechts van de positieve kritieke waarde en links van de negatieve kritieke waarde. In de figuur is het rechter gebied rood weergegeven.

Hoe groot is de kans dat we terecht de nulhypothese verwerpen? Die kans noemen we het *onderscheidingsvermogen* van de toets en is in figuur 3.2 de groene en rode oppervlakte samen. Als we niet weten, hoe groot de deformatie is, kunnen we ook niet zeggen, hoe groot het onderscheidingsvermogen is. Toch willen we graag een uitspraak doen over de “kracht” van de toets. Daarom wordt de vraag gesteld: “hoe groot is de deformatie (of afwijking veroorzaakt door meetfouten) die met een kans van, zeg, 80% gevonden kan worden?”. We verschuiven in figuur 3.2 het rechterhoedje zodanig, dat de groene en rode oppervlakte samen 80% wordt van de totale oppervlakte onder het hoedje. Uit een tabel van de inverse normale verdeling is te halen, hoe groot dan de afstand a is. Het is ook te berekenen met de matlabfunctie `norminv`. Het resultaat is 0,84. Tel dit op bij 3,29 en we hebben de gezochte deformatie, die we aanduiden met ∇_0 en de *grenswaarde* noemen of in het Engels *minimal detectable bias* (m.d.b.).

$$\text{grenswaarde: } \nabla_0 = 4,13 \quad (3.4)$$

Met de onderindex 0 van ∇_0 geven we aan, dat het niet om de echte deformatie gaat, maar om de deformatie, die bij een bepaald onderscheidingsvermogen hoort.

Als we nu de gemeten hoogteverandering t toetsen door w te berekenen en te kijken of die in absolute waarde groter is dan 3,29, dan kunnen we een deformatie van $4,13 \cdot \sqrt{2} \text{ mm} = 5,84 \text{ mm}$ met een kans van 80% opsporen. Dat is bijna zes keer de standaardafwijking van de enkele hoogte.

3.2.4 Tolerantie en grenswaarde

De opdrachtgever van deformatiemetingen formuleert in veel gevallen een *tolerantie* voor de hoogteverandering van een punt. Als de gemeten hoogteverandering de tolerantie overschrijdt, moet de opdrachtgever gewaarschuwd worden, dat de deformatie een onacceptabele grens heeft overschreden.

De tolerantie wordt meestal niet als een statistische grootheid gezien. Er wordt niet gesproken over fouten van de eerste of de tweede soort. Deze fouten zijn het ten onrechte concluderen, dat de tolerantie is overschreden (fout van de eerste soort) of het ten onrechte concluderen, dat de tolerantie niet is overschreden (fout van de tweede soort). De kans op dergelijke fouten is altijd aanwezig en met de opdrachtgever zouden er afspraken over moeten worden gemaakt (al was het maar in de “kleine lettertjes” van het contract).

Het in de vorige paragraaf ingevoerde begrip “grenswaarde” biedt een handvat om het begrip tolerantie statistisch te onderbouwen. De geodeet berekent vanuit zijn meetmethode (keuze van: meetinstrumenten, meetpunten, tijdsplanning, meetomstandigheden, enz.) de grenswaarden. Hij of zij zorgt ervoor, dat de grenswaarden gelijk zijn aan de tolerantie of daaronder liggen en komt met de opdrachtgever overeen, dat de grenswaarde gezien wordt als de operationalisering van de tolerantie.

Aldus is het bepalen van de tolerantie de taak van de opdrachtgever en het bepalen van de grenswaarde de taak van de geodeet. Wel moeten beiden inzicht hebben in elkaars vakgebieden, en elkaar adviseren, om hun taken goed te kunnen uitvoeren.

3.2.5 Via de methode van de kleinste kwadraten

De mathematische geodesie biedt methoden om waarnemingen te vereffenen (te laten voldoen aan wiskundige verbanden), te toetsen en de kwaliteit van de resultaten te beschrijven. Centraal in deze methoden staat de vereffeningsmethode van de kleinste kwadraten.

Het is mogelijk de verkregen resultaten van de vorige paragrafen te herformuleren in termen van de vereffeningsmethode van de kleinste kwadraten. Het levert dezelfde resultaten op. Het voordeel hiervan is, dat uitbreiding naar een netwerk van gemeten punten, naar punten die gecorreleerd zijn en naar oplossing van het schrankingsprobleem, mogelijk is met de bestaande kennis van de methode van de kleinste kwadraten.

Het formulearsenaal van de methode van de kleinste kwadraten is te vinden op bladzijde 82 en verder. In het vervolg van deze paragraaf 3.2.5 wordt bekendheid ermee verondersteld.

Formule (3.1) is op te vatten als een voorwaardenvergelijking volgens het B-model (in de terminologie van prof. Teunissen (2000); prof. Tienstra noemde dit het eerste standaardvraagstuk (Tienstra, 1956)). Daaruit volgt:

$$y = \begin{pmatrix} h_B^{(1)} \\ h_B^{(2)} \end{pmatrix}; Q_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma^2 = 1; B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Met de formules aan het einde van deze notitie vinden we:

$$Q_t^{-1} = \frac{1}{2} \quad (3.6)$$

3.2.5.1 Toetsing

Voor de toetsing maakt het niet uit of we de algemene toets van het model nemen of de w-toets, omdat er een overvalligheid van slechts één is. Voor de w-toets van de nulgrootheid t berekenen we de w-waarde als (Teunissen, 2006, blz. 89):

$$w_t = \frac{c_t^T Q_t^{-1} t}{\sigma \sqrt{c_t^T Q_t^{-1} c_t}} \quad (3.7)$$

Er is slechts één nulgrootheid, waardoor c_t een enkel getal is, namelijk: $c_t = 1$. We krijgen:

$$w_t = \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot t}{1 \cdot \sqrt{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} t \quad (3.8)$$

De variabele w_t is, zoals vermeld in Teunissen (2006), standaardnormaal verdeeld en daarom is vergelijking (3.8) dezelfde als vergelijking (3.3). Toetsing van w_t vindt dan ook op gelijke wijze plaats.

3.2.5.2 Grenswaarde

Voor het berekenen van de grenswaarde geldt de formule:

$$\nabla_0 = \sigma \sqrt{\frac{\lambda_0}{c_t^T Q_t^{-1} c_t}} \quad (3.9)$$

De variabele λ is de niet-centraliteitsparameter van de χ^2 -verdeling (uitgesproken als ‘chi-kwadraatverdeling’). Bij een overvalligheid van slechts één is het kwadraat van een normaal verdeelde grootheid χ^2 -verdeeld. Dus w^2 en w_t^2 hebben een χ^2 -verdeling. λ is dan het kwadraat van ∇ uit paragraaf 3.2.3. Met λ_0 wordt de waarde van λ aangeduid als het significantieniveau en het onderscheidingsvermogen zekere waarden

hebben, vgl. de notatie ∇_0 . Als voor het significantieniveau 0,1% en voor het onderscheidingsvermogen 80% wordt genomen, is $\lambda_0 = 17,075$. We krijgen dan:

$$\nabla_0 = \frac{\sqrt{17,075}}{\sqrt{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}} = 4,13 \cdot \sqrt{2} \text{ mm} = 5,84 \text{ mm} \quad (3.10)$$

Dit komt overeen met wat in paragraaf 3.2.3 is berekend voor de grenswaarde van t .

3.2.6 Conclusie over één punt en zijn hoogte

We hebben gezien hoe de precisie van de hoogte van één punt wordt beschreven door een standaardafwijking en hoe het verschil van twee hoogtes van hetzelfde punt kan worden getoetst. De grenswaarde van de toetsing is berekend en de relatie met het begrip tolerantie is gelegd.

Wat niet is behandeld, is de vraag hoe men aan de standaardafwijking van een hoogte komt en wat de betekenis daarvan is. Daartoe moet eerst duidelijk worden, hoe het begrip “hoogte” is gedefiniëerd.

3.3 Wat is een hoogte?

Een deformatiemeting probeert de beweging van objecten te registreren. Het te meten object kan van alles zijn: een gebouw, een dijk, een civieltechnisch of waterbouwkundig kunstwerk, een terrein dat het risico van aardverschuivingen kent, een gebied dat bodemdaling kent, enzovoorts. Het meten van de beweging door de hoogte van slechts één punt te meten is ongebruikelijk. Het object wordt door *verschillende* punten, een puntenveld, gerepresenteerd. De punten vormen aldus een model (een “idealiserende” of “discretisering”) van het object.

In de volgende paragraaf wordt beschreven hoe het vereffen, toetsen en het berekenen van grenswaarden kan plaatsvinden voor een puntenveld. Om dat te kunnen doen, wordt eerst in deze paragraaf ingegaan op wat een hoogte eigenlijk is.

3.3.1 Definitie van hoogte

Veronderstel, dat een docent aan eerstejaarsstudenten vraagt een histogram van de hoogte van de tafel, waar de student aan zit, te maken om aldus het begrip “normale verdeling” te kunnen introduceren. Al gauw begrijpt de student, dat het begrip “hoogte” niet eenduidig is. Waar precies moet de hoogte worden gemeten? Moet het voetje onder de poot worden meegenomen? Moet in millimeters worden afgelezen? Wat wel duidelijk is: *de hoogte is een afstand tussen twee punten*, een punt boven en een punt onder.

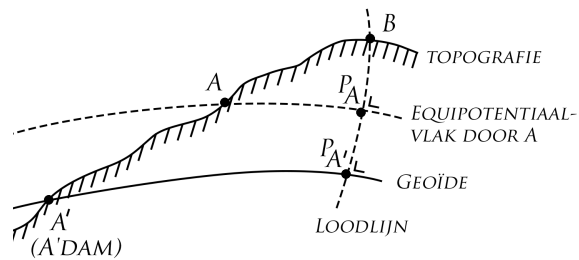
Laten we nu kijken naar een punt op een object, waarvan we de hoogte willen meten. Wat zijn de twee punten, waartussen de afstand wordt gemeten? De geodesie geeft antwoorden en stelt, dat er verschillende mogelijkheden zijn, met als resultaat verschillende typen “hoogte”: dynamische hoogte, orthometrische hoogte of normale hoogte. Voor het NAP kunnen we ervan uitgaan, dat de orthometrische hoogte wordt bedoeld. De definitie is als volgt (vertaald uit: [Torge & Müller \(2012\)](#)):

De orthometrische hoogte H wordt gedefinieerd als de lineaire afstand tussen het punt aan de oppervlakte en de geoïde, gerekend langs de gekromde loodlijn.

Het ene punt is dus het punt, waarvan we de hoogte willen weten en het andere punt is een punt op de geoïde, ergens diep in de aarde (soms boven de aarde, als we ons onder zeeniveau bevinden). In Nederland gaan we ervan uit, dat de geoïde samenvalt met het nulvlak van het NAP, of in ieder geval daarmee evenwijdig loopt. Het nulvlak van het NAP is het *referentievlak* en het is een equipotentiaalvlak (een vlak, waar de aardse zwaartekrachts potentiaal overal gelijk is¹). Dit referentievlak is een gekromd oppervlak.

¹Op een equipotentiaalvlak is *niet* overal de zwaartekracht gelijk.

De hoogte van punt B in figuur 3.3 is de afstand van $P_{A'}$ naar B . Hoe meten we die afstand? Stel dat we waterpassing gebruiken om de afstand te meten. We meten de afstand van $P_{A'}$ naar B niet rechtstreeks, maar bepalen de hoogteverschillen over steeds een afstand van ongeveer 60 m (een slag) en tellen de gemeten hoogteverschillen bij elkaar op totdat we bij punt A zijn. We veronderstellen dan, dat de som van de gemeten hoogteverschillen gelijk is aan de afstand van P_A naar B . Naast de meetruis die het waterpassen kent, is het resultaat onnauwkeurig, omdat de veronderstelling, dat de vizierlijnen van het waterpasinstrument precies een equipotentiaalvlak volgen, dat het equipotentiaalvlak door A precies evenwijdig loopt aan de vizierlijnen en dat de loodlijn van P_A naar B een rechte lijn is, niet helemaal juist is. De hoogte van punt A , dat wil zeggen de afstand $P_{A'}P_A$, wordt verondersteld bekend te zijn, zodat we de door waterpassing bepaalde afstand P_AP_B kunnen optellen bij de afstand $P_{A'}P_A$ om de orthometrische hoogte van punt B te krijgen.



Figuur 3.3: Hoogtedefinitie

Wat is punt A ? In de praktijk is het een waterpasbout, waarvan we veronderstellen, dat we de hoogte al kennen met voldoende precisie. Als we een “absolute deformatieanalyse” uitvoeren, veronderstellen we ook, dat punt A stabiel is en geen last heeft van de deformatie.

De praktijk wil vaak van punt A een hoogte in NAP hebben en daarmee verder rekenen. Dat betekent, dat de onnauwkeurigheid in de bepaling van de hoogte van A ten opzichte van het NAP-referentievlak erbij komt. Ook hier geldt, dat die onnauwkeurigheid niet alleen meetruis bevat, maar ook veronderstellingen over het verloop van vizierlijnen en de geoid.

De praktijk wil vaak van punt A een hoogte in NAP hebben en daarmee verder rekenen. Dat betekent, dat de onnauwkeurigheid in de bepaling van de hoogte van A ten opzichte van het NAP-referentievlak erbij komt. Ook hier geldt, dat die onnauwkeurigheid niet alleen meetruis bevat, maar ook veronderstellingen over het verloop van vizierlijnen en de geoid.

Als met een andere meettechniek dan waterpassing wordt gemeten, moet van andere veronderstellingen worden uitgegaan. Bijvoorbeeld satellietradarinterferometrie bepaalt hoogteverschillen ten opzichte van een ellipsoïde, waarvan de ligging ten opzichte van de geoid maar met beperkte precisie bekend is.

3.3.2 Welke hoogteverandering willen we weten?

Als we de hoogteverandering van een punt willen weten, gaat het meestal niet om de hoogteverandering ten opzichte van het NAP-referentievlak, maar ten opzichte van objecten in de buurt. Het is daarom logisch om de hoogteverandering ten opzichte van punt A te willen weten en hoogtes *niet* in NAP uit te drukken. We bepalen het hoogteverschil van B met A . Het referentievlak is nu het equipotentiaalvlak door punt A . Omdat A niet al te ver van B ligt, mag verondersteld worden dat het equipotentiaalvlak van A en dat van B evenwijdig lopen. Als A en B binnen een afstand van enkele kilometers liggen, mogen die vlakken zelfs als vlak worden gezien.

De praktijk wil graag gebruik maken van NAP-punten, omdat verondersteld wordt, dat de hoge precisie van die punten bijdraagt aan de deformatieanalyse. Bij de kwaliteit van de hoogte van veel NAP-punten kunnen echter vraagtekens worden gezet. Een goede analyse van de bekende NAP-hoogtes, zowel van de bron (wie heeft gemeten, hoe is de berekening gedaan, wat is de betrouwbaarheid, van wanneer is de meting?) als van het bewegingsgedrag relatief ten opzichte van de te analyseren objecten, is daarom vereist. Als de NAP-punten toch worden gebruikt, is het belangrijk, dat alleen de onderlinge (relatieve) precisie van die punten wordt benut. Het deel van de precisie van de gebruikte NAP-punten, dat de precisie van de ligging ten opzichte van het NAP-referentievlak beschrijft, moet worden verwijderd. Dat gebeurt door de punten te *schraken*.

3.4 Drie punten en hun hoogtes

In figuur 3.4 zijn drie punten weergegeven, waarvan we de hoogtes willen weten. We zijn geïnteresseerd in de onderlinge hoogteveranderingen, niet in de hoogtes ten opzichte van het NAP-referentievlak. Punt B en C zijn punten van een object, dat mogelijk deformeert. Punt A is een referentiepunt.

Verondersteld wordt, dat drie hoogteverschillen tussen de drie zijn gemeten, van A naar B , van A naar C en van B naar C . Slechts twee epochen (tijdstippen waarop is gemeten) worden beschouwd.

In deze paragraaf wordt getoond hoe de precisie van de drie punten het beste kan worden beschreven, hoe toetsing op deformatie kan plaatsvinden en hoe de grenswaarden kunnen worden berekend. De aanpak past de methode van de kleinste kwadraten toe.

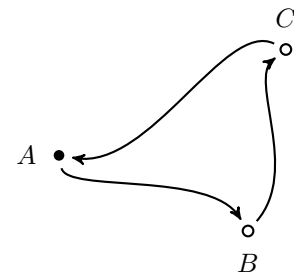
Twee methoden om de deformatieanalyse uit te voeren worden getoond.

De eerste methode gaat uit van de gemeten hoogteverschillen. Deze worden in de praktijk eerst per epoke vereffend en getoetst om meetfouten eruit te halen. Deze stap wordt hier achterwege gelaten. De gemeten hoogteverschillen worden verondersteld geen meetfouten te bevatten. Ze zijn natuurlijk wel onderhevig aan meetruis. De gemeten hoogteverschillen van zowel de eerste als de tweede epoke worden samengevoegd in één vereffening. De vereffening, maar ook de toetsing en kwaliteitsbeschrijving vinden dan plaats.

De tweede methode vereffent eerst de gemeten hoogteverschillen per epoke. Daaruit volgen de vereffende hoogtes van de drie punten samen met de covariantiematrix van de vereffende hoogtes. Deze covariantiematrix bevat de (kwadraten van) de standaardafwijkingen van de hoogtes en ook de covarianties tussen de vereffende hoogtes. De covarianties geven informatie over de statistische correlatie tussen de vereffende hoogtes. Vervolgens wordt een tweede vereffening uitgevoerd, waarin de vereffende hoogtes van beide epochen worden samengevoegd, vereffend en getoetst. Het resultaat is hetzelfde als bij de eerste methode.

De tweede methode sluit nauw aan bij wat de praktijk in het algemeen doet. Het verschil is, dat de covariantiematrix van de vereffende hoogtes meestal niet wordt bewaard en niet wordt gebruikt. Getoond wordt wat het (negatieve) effect daarvan is op de toetsing en de grenswaarden.

Getoond wordt tenslotte wat de schranke van de vereffende hoogtes betekent en wat het effect is als die achterwege wordt gelaten.



Figuur 3.4: Gemeten hoogteverschillen tussen drie punten A , B en C

3.5 Deformatieanalyse met hoogteverschillen

In deze paragraaf bekijken we de situatie dat zowel de gemeten hoogteverschillen van epoke 1 als die van epoke 2 in hetzelfde vereffeningsmodel worden gestopt. De onbekende, gezochte parameters zijn de hoogtes van de drie punten A , B en C .

3.5.1 De waarnemingen y en de parameters x

Waarnemingen Voor het opstellen van het vereffeningsmodel worden de waarnemingsvector y en de parametervector x als volgt gedefinieerd:

$$y = \begin{pmatrix} h_{AB}^{(1)} \\ h_{AC}^{(1)} \\ h_{BC}^{(1)} \\ \dots \\ h_{AB}^{(2)} \\ h_{AC}^{(2)} \\ h_{BC}^{(2)} \\ \dots \\ h_A^{(0)} \\ \dots \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix} ; \quad x = \begin{pmatrix} h_A \\ \dots \\ h_B^{(1)} \\ h_C^{(1)} \\ \dots \\ h_B^{(2)} \\ h_C^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

De vector y bevat negen waarnemingen, onderverdeeld in vier groepen, zoals aangegeven door de puntjes. De eerste groep bevat de gemeten hoogteverschillen in epoche 1. De tweede groep die van epoche 2. Van alle gemeten hoogteverschillen wordt aangenomen, dat de standaardafwijking $\sqrt{1,5} \text{ mm} = 1,22 \text{ mm}$ is en dat zij onderling niet gecorreleerd zijn.

De derde groep bestaat uit één waarneming, de hoogte van punt A , waarvoor we een willekeurige, vaste waarde aannemen. Deze “uit de duim gezogen” waarneming is nodig, omdat we uit hoogteverschillen geen hoogtes kunnen bepalen. We moeten van minimaal één punt de hoogte kennen om die van de andere punten te bepalen. Omdat de hoogte van A een vaste waarde is, is de standaardafwijking nul. We schrijven dit op als $\sigma_A = 0$.

De waarnemingen v_B en v_C van de vierde groep zijn de “constateringen”, dat de hoogtes in epoche 1 gelijk moeten zijn aan die in epoche 2:

$$\begin{aligned} v_B &= h_B^{(2)} - h_B^{(1)} \\ v_C &= h_C^{(2)} - h_C^{(1)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

We veronderstellen, dat er geen deformatie is opgetreden en daarom hebben de waarnemingen v_B en v_C de volgende waarden:

$$\begin{aligned} v_B &= 0 \\ v_C &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Voor de standaardafwijking van deze twee waarnemingen nemen we nul:

$$\sigma_{v_B} = \sigma_{v_C} = 0 \quad (3.14)$$

Het is mogelijk om voor deze standaardafwijkingen een of andere positieve waarde te nemen, die weer geeft hoeveel vertrouwen we in onze nulhypothese hebben, dat er geen deformatie is. We gaan hier niet verder op in en blijven bij de standaardafwijking van nul.

Voor punt A moet in epoche 1 en 2 dezelfde vaste waarde worden genomen, anders geldt vergelijking (3.13) niet. We zeggen, dat punt A de (reken)basis² is en dat in beide epochen op dezelfde basis moet worden geschrant³.

Parameters De parametervector x bestaat uit drie groepen, de hoogte van A , de hoogtes van de twee punten B en C in epoche 1 en hun hoogtes in epoche 2. Doordat we die niet samenvoegen in één groep van drie hoogtes, ontstaat de mogelijkheid de waarnemingen (3.12) op te stellen en dus ook te toetsen en er grenswaarden voor te berekenen. De grenswaarden gaan ons vertellen, welke deformatie door de vereffening en toetsing ontdekt kunnen worden.

²De rekenbasis wordt ook aangeduid als S-basis.

³het woord *schranten* is ingevoerd door prof. Baarda naar analogie van het schranken van een deur (Baarda, 1966b).

3.5.2 Waarnemingsvergelijkingen en coëfficiëntenmatrix A

Om de waarnemingen te kunnen vereffenen en een schatting te berekenen voor de hoogtes A , B en C , wordt onderstaand gebruik gemaakt van het A-model.

Het gemeten hoogteverschil $h_{AB}^{(1)}$ hangt als volgt af van de hoogtes $h_A^{(1)}$ en $h_B^{(1)}$:

$$h_{AB}^{(1)} = h_B^{(1)} - h_A^{(1)} + e_{AB}^{(1)} \quad (3.15)$$

waar $e_{AB}^{(1)}$ de meetruis beschrijft. Op analoge wijze hangen de andere hoogteverschillen van de hoogtes af. We krijgen daarmee en met vgl. (3.12) het volgende stelsel waarnemingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} h_{AB}^{(1)} &= -h_A + h_B^{(1)} + e_{AB}^{(1)} \\ h_{AC}^{(1)} &= -h_A + h_C^{(1)} + e_{AC}^{(1)} \\ h_{BC}^{(1)} &= -h_B^{(1)} + h_C^{(1)} + e_{BC}^{(1)} \\ h_{AB}^{(2)} &= -h_A + h_B^{(2)} + e_{AB}^{(2)} \\ h_{AC}^{(2)} &= -h_A + h_C^{(2)} + e_{AC}^{(2)} \\ h_{BC}^{(2)} &= -h_B^{(2)} + h_C^{(2)} + e_{BC}^{(2)} \\ h_A^{(0)} &= h_A + e_A \\ v_B &= -h_B^{(1)} + h_B^{(2)} + e_B \\ v_C &= -h_C^{(1)} + h_C^{(2)} + e_C \end{aligned} \quad (3.16)$$

De meetruis e_A , e_B en e_C wordt verondersteld afwezig te zijn, is nul, maar wordt hier wel opgenomen, zodat we een uniforme aanpak van alle waarnemingen krijgen. Door de standaardafwijking gelijk aan nul te kiezen, wordt in de vereffening niets aan deze waarnemingen⁴ gewijzigd.

Uit het stelsel van waarnemingsvergelijkingen (3.16) en uit de eerder aangenomen standaardafwijkingen, aannemend, dat er geen correlatie tussen de waarnemingen is, volgen de coëfficiëntenmatrix A en de covariantiematrix $D\{y\}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D\{y\} = 1,5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mm}^2 \quad (3.17)$$

De covariantiematrix $D\{y\}$ is een diagonaalmatrix met zes enen en drie nullen op de hoofddiagonaal. Voor de variantiefactor wordt genomen $\sigma^2 = 1,5 \text{ mm}^2$ en de cofactorenmatrix Q_y (ook genoemd: matrix van gewichtscoëfficiënten) wordt bepaald door:

$$D\{y\} = \sigma^2 Q_y \quad (3.18)$$

3.5.3 Vereffening, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van twee epochen

De vereffening wordt uitgevoerd met de opgestelde coëfficiëntenmatrix A , de waarnemingsvector y en de cofactorenmatrix Q_y . Voor het A-model is het lastig, dat de matrix Q_y nullen op de hoofddiagonaal

⁴In de literatuur wordt voor dit type waarnemingen wel de term “pseudowaarnemingen” gebruikt. De auteur gebruikt deze term niet, omdat alle waarnemingen, ook de zogenaamde “echte” waarnemingen, op modelaannames zijn gebaseerd. Er is geen fundamenteel verschil tussen de “echte” en de “pseudo” waarnemingen.

heeft staan. Er zijn verschillende oplossingen voor. Het eenvoudigst is het overstappen op het B-model. Dat kan door uit de matrix A de matrix B af te leiden door een eliminatieproces. In het programma Matlab kan dat met: $B = \text{null}(A')$.

Het resultaat van de berekeningen zijn de standaardafwijkingen van de vereffende hoogtes en de grenswaarden van de waarnemingen.

De standaardafwijking van de vereffende hoogtes $\hat{h}_B$ ⁵ en $\hat{h}_C$ voor beide epochen is $\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ mm} = 0,7 \text{ mm}$.

De grenswaarde van alle gemeten hoogteverschillen is 6,2 mm, maar daar zijn we nu niet in geïnteresseerd. Ons interesseren de grenswaarden van de beide laatste waarnemingen, de “constatering”, dat $h_B^{(1)} = h_B^{(2)}$ en $h_C^{(1)} = h_C^{(2)}$, ofwel dat er geen deformatie is opgetreden. Die grenswaarden zijn 5,06 mm. Het betekent, dat een deformatie (in de hoogte) van 5,06 mm van alleen punt B met een kans van 80% gevonden wordt door de w-toets van de de betreffende ‘constatering’. Hetzelfde geldt voor de w-toets van punt C .

Interessant is de verhouding tussen deze grenswaarde en de standaardafwijking van de vereffende hoogte: $5,06 \text{ mm} / 0,7 \text{ mm} = 7,2$.

3.5.4 Berekeningen met MOVE3

De berekeningen voor deze notitie zijn door de auteur uitgevoerd met het programma Matlab. De berekeningen van deze paragraaf 3.5 kunnen ook worden uitgevoerd met het programma MOVE3 van Sweco, dat in de praktijk veel wordt gebruikt.

3.6 Deformatieanalyse met hoogtes

3.6.1 De *principal property* van prof. Tienstra

Prof. Tienstra formuleert in zijn boek over de vereffeningstheorie (Tienstra, 1956) op blz. 154 een *principal property* van het vereffenen volgens de methode van de kleinste kwadraten.

“Every problem of adjustment may be divided into an arbitrary number of phases, provided that in each following phase the cofactors resulting from preceding phase(s) are used.”

Het betekent, dat de uitkomsten van een vereffening, zoals vereffende coördinaten, gebruikt kunnen worden in een vervolgreffening, zoals een deformatieanalyse. Maar dan moet in de vervolgreffening wel de cofactorenmatrix⁶ van de vereffende coördinaten gebruikt worden. Dit principe wordt in het navolgende toegepast. Eerst wordt getoond, hoe de gemeten hoogteverschillen worden vereffend met als resultaat vereffende coördinaten en hun cofactorenmatrix. Daarna wordt dat resultaat gebruikt in een vervolgreffening. Het zal blijken, dat we op dezelfde resultaten uitkomen als in paragraaf 3.5.

Deze gefaseerde aanpak is belangrijk, omdat hij sterk lijkt op de procedure, zoals die in de praktijk wordt toegepast. Per epoche worden hoogtes berekend en bij de deformatieanalyse worden de hoogtes met elkaar vergeleken en de verschillen getoetst. Essentieel verschil is echter, dat in de praktijk de cofactorenmatrix zelden wordt gebruikt. We kijken daarom ook, wat de consequenties daarvan zijn.

3.6.2 De eerste fase: hoogteverschillen

Het vereffenningsmodel voor een enkele epoche is op te stellen door slechts een deel van de waarnemingsvergelijkingen (3.16) te nemen: voor de eerste epoche de eerste drie vergelijkingen (de drie hoogteverschillen) en de zevende vergelijking (de hoogte van A). Er zijn slechts drie parameters: de hoogtes van A , B en C in epoche 1. Voor epoche 2 gaat het analoog.

⁵Met het dakje van $\hat{h}$ wordt aangegeven, dat het een vereffende waarde betreft.

⁶Een ander woord voor “cofactorenmatrix” is “matrix van gewichtscoëfficiënten” en het is de covariantiematrix gedeeld door de variantiefactor, zie vgl. (3.18).

Voor de vereffende coördinaten van epoche 1 wordt de volgende covariantiematrix berekend:

$$D\left\{\begin{pmatrix} h_A \\ \hat{h}_B^{(1)} \\ \hat{h}_C^{(1)} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \text{ mm}^2 \quad (3.19)$$

Met $\hat{h}_B^{(1)}$ en $\hat{h}_C^{(1)}$ worden de vereffende hoogtes van B en C in de eerste epoche aangeduid. In de tweede epoche worden dezelfde metingen met dezelfde standaardafwijking uitgevoerd. De resulterende covariantiematrix is daarom identiek aan die van vgl. (3.19).

Voor de variantiefactor is gekozen $\sigma^2 = 1.5 \text{ mm}^2$. Dat is gedaan, zodat uit de covariantiematrix van de vereffende hoogtes voor de vereffende hoogtes van B en C een standaardafwijking van 1 mm volgt. Dat is dezelfde standaardafwijking als voor de hoogte van het punt in paragraaf 3. We kunnen daardoor straks de resultaten met elkaar vergelijken.

3.6.3 De tweede fase: hoogtes

In de tweede fase wordt een vervolgereffening uitgevoerd. De waarnemingen zijn nu de vereffende coördinaten en hun covariantiematrix van de eerste epoche én de de vereffende coördinaten en hun covariantiematrix van de tweede epoche. We veronderstellen, dat de beide epochen onderling niet gecorreleerd zijn. Voor de vector y en de bijbehorende covariantiematrix krijgen we:

$$y = \begin{pmatrix} h_A \\ \hat{h}_B^{(1)} \\ \hat{h}_C^{(1)} \\ \hat{h}_B^{(2)} \\ \hat{h}_C^{(2)} \end{pmatrix}; \quad D\{y\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \text{ mm}^2 \quad (3.20)$$

De voorwaarden van het B-model zijn eenvoudig op te stellen. Zij luiden:

$$\begin{aligned} t_1 &= -h_B^{(1)} + h_B^{(2)} \\ t_2 &= -h_C^{(1)} + h_C^{(2)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Van de variabelen t_1 en t_2 verwachten we dat zij nul zijn: hun verwachtingswaarden zijn 0.

De matrix B^T van het B-model heeft twee rijen (er zijn twee voorwaarden) en zes kolommen (er zijn zes waarnemingen) en ziet er als volgt uit:

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Alle informatie is nu beschikbaar om een vereffening volgens de methode van de kleinste kwadraten uit te voeren. Het resultaat zijn vereffende waarnemingen, dat wil zeggen: de vereffende coördinaten door het samenvoegen van de eerste en tweede epoche. De berekening geeft ook de grenswaarden. Die zijn 5,06 mm, precies dezelfde waarde als we bij de vereffening in één keer in paragraaf 3.5.3 zagen.

De covariantiematrix, zoals die rechts bij (3.20) staat, is bijna een diagonaalmatrix, maar niet helemaal. Er staan covarianties in tussen de vereffende hoogtes van B en C . De waarde is 0,5, terwijl de varianties 1 zijn, waaruit voor de correlatiecoëfficiënt ρ (een getal tussen 0 en 1) volgt:

$$\rho = \frac{0,5}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 0,5 \quad (3.23)$$

Dit duidt op een behoorlijke correlatie, die niet zo maar verwaarloosd kan worden. Dat blijkt, als we haar wel verwaarlozen. Als in $D\{y\}$ voor alle waarden 0,5 een nul wordt ingevoerd en de vereffening opnieuw wordt uitgevoerd, wordt de grenswaarde 5,84 mm. Dit is precies de waarde die we ook hebben berekend in paragraaf 3.2.5.2 voor het toetsen van een enkel punt. Het verwaarlozen van de correlatie betekent dus, dat de toetsing van het puntenveld neerkomt op het toetsen van elk punt apart.

De grenswaarde van 5,84 mm is groter dan de grenswaarde van 5,06 mm. Dit betekent, dat door de verwaarlozing van de correlatie de toetsing minder scherp is!

3.7 Schranking

In paragraaf 3.3.2 is gesteld, dat de hoogtes moeten worden geschrinkt, omdat alleen de onderlinge (relatieve) precisie ertoe doet. In de berekeningen in de voorgaande paragrafen vond de schranking plaats, doordat we de hoogte van punt A vasthielden door er een standaardafwijking van nul aan te geven. Wat gebeurt er als we dat niet doen?

Laten we de hoogte van A een standaardafwijking van 2 mm geven en de vereffening opnieuw uitvoeren. De resulterende grenswaarde is 5,7 mm. De toets wordt dus minder scherp. Daarbij komt nog het probleem, dat vaak niet duidelijk is, waarop de waarde van 2 mm voor de standaardafwijking van de hoogte van A is gebaseerd.

Als we bovendien de correlatie verwaarlozen, wordt de grenswaarde 13,07 mm! Een zeer aanzienlijke verslechtering.

Dat het effect van de verwaarlozing nu veel groter is (een meer dan twee keer zo grote grenswaarde), is te begrijpen, als we naar de covariantiematrix van de vereffende coördinaten kijken. In plaats van vgl. (3.19) hebben we nu:

$$D\left\{\begin{pmatrix} h_A \\ \hat{h}_B^{(1)} \\ \hat{h}_C^{(1)} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4,5 \\ 4 & 4,5 & 5 \end{pmatrix} \text{ mm}^2 \quad (3.24)$$

Niet alleen de varianties, maar ook de covarianties zijn groter geworden. De relatieve precisie tussen de punten B en C wordt daardoor veel sterker beïnvloed bij het gelijk stellen aan nul van de covariantie.

De waarde van 13,07 mm van de grenswaarde kunnen we ook berekenen door de hoogte van bijvoorbeeld punt B in de eerste epoche en die in de tweede epoche van elkaar af te trekken. Van het verschil bepalen we de standaardafwijking en we vermenigvuldigen die met de factor 4,13⁷ van vgl. (3.4). Dit bevestigt, dat het verwaarlozen van de correlatie neerkomt op het analyseren van ieder punt apart.

Aangenomen is, dat punt A een referentiepunt is. Op dit punt wordt geschrinkt en dat suggereert, dat de rekenbasis vastgelegd moet worden door referentiepunten. Dat is echter niet noodzakelijk. Ook punt B of C kan als rekenbasis dienen. Als het punt echter op deformatie getoetst moet worden, moet de basis verplaatst worden naar een ander punt. Dat kan plaatsvinden met een schrankingstransformatie (Baarda, 1966b, 1973). Het is mogelijk om zelfs dat niet te doen. Dat kan door het vereffeningsmodel, zoals vastgelegd door de B -matrix van vgl. (3.22), uit te breiden met een of meer transformatieparameters. De auteur heeft dit beschreven voor 3D in een artikel in het tijdschrift *Survey Review* (Velsink, 2015a).

3.8 Eén- en meerdimensionale grenswaarden

In paragraaf 3.4 gaat het over een puntenveld van drie punten. De grenswaarden die worden berekend, betreffen de deformatie van één punt, die kunnen worden opgespoord door een w -toets uit te voeren. Deze grenswaarden zijn waarden die gelden, als slechts één hoogte fout (gedeformeerd) is, maar de andere niet. De grenswaarden zijn waardevolle grootheden om de “kracht” van een meetopzet te bepalen.

In de praktijk zal vaak meer dan één punt beïnvloed zijn door een deformatie. Er is sprake van een deformatiepatroon of -trend. Het is mogelijk om daarvoor een specifieke toets op te zetten. Het is dan een meerdimensionale toets, in tegenstelling tot de eendimensionale w -toets en de daaruit volgende eendimensionale grenswaarde. Probleem is vaak, dat van tevoren niet is aan te geven, welk patroon aanwezig zal zijn, dus ook niet welke toets toegepast zal gaan worden. Een analyse van de kracht van een meetopzet moet dan noodgedwongen beperkt blijven tot het berekenen van de eendimensionale grenswaarden.

Als wel van tevoren bekend is welk patroon verwacht kan worden, kan ook berekend worden welke deformaties opgespoord kunnen worden. Berekend worden nu echter niet de eendimensionale grenswaarden, maar meerdimensionale grenswaardenellipsen, -ellipsoïden of -hyperellipsoïden (Teunissen, 2006,

⁷gebruik 4,132 om een afrondingsfout te voorkomen

blz. 105). Hoe deze echter geïnterpreteerd moeten worden en welke parameters van zo'n grenswaardenellipsoïde genormeerd kunnen worden, is echter niet eenvoudig vast te stellen. Nader onderzoek zal hiernaar moeten plaatsvinden.

3.9 Conclusies over de analyse van hoogteveranderingen

Dit hoofdstuk heeft de precisie, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van de hoogte van een enkel punt en de hoogtes van een puntenveld, bestaande uit drie punten behandeld. Uitgewerkt is de situatie voor hoogtebepaling van de punten met behulp van hoogteverschilmetingen. Het volgende kan worden geconcludeerd.

1. Het begrip "grenswaarde" kan worden gebruikt door de geodeet om het begrip "tolerantie", dat door een niet-geodetisch geschoolde opdrachtgever wordt gehanteerd, te vertalen naar een statistische context.
2. De grenswaarde zal, afhankelijk van de keuze voor significantieniveau en onderscheidingsvermogen, vele malen (bij de gebruikelijke keuzes zeker viermaal) groter zijn dan de standaardafwijking van de enkele hoogteverschilmeting of van de enkele hoogte.
3. Het verwaarlozen van correlatie verslechtert de toetsing merkbaar.
4. Als de correlatie verwaarloosd wordt, heeft het de voorkeur de oorspronkelijke metingen (de gemeten hoogteverschillen, de gemeten GNSS-basislijnen, de gemeten total-stationmetingen, enzovoorts) te gebruiken. Een gezamenlijke vereffening van de metingen van alle epochen in bijvoorbeeld MOVE3 levert een betere deformatieanalyse (kleinere grenswaarden) dan de analyse van de berekende coördinaten per epoche (als de correlatie wordt verwaarloosd). Overigens biedt MOVE3 nog maar een beperkte functionaliteit om deformatiepatronen te kunnen toetsen, zie paragraaf 5.2.
5. Als de correlatie tussen vereffende hoogtes of coördinaten niet wordt verwaarloosd en Tienstra's *principal property* wordt toegepast, kan de analyse van hoogtes of coördinaten van meer epochen met een kleinste-kwadratenvereffening een uitstekende deformatieanalyse opleveren.
6. Schranke van hoogtes en 2D- en 3D-coördinaten (en van hun covariantiematrices) is noodzakelijk. Als dat wordt nagelaten, verslechtert de toetsing aanzienlijk. Het risico is bovendien groot, dat de waarde van uitspraken over deformaties onduidelijk wordt, omdat niet of niet goed bekend is, waarop de aansluitingspunten zijn geschrinkt.
7. Een puntenveld moet als een geheel worden geanalyseerd; de analyse moet niet voor elk punt apart plaatsvinden.
8. Nader onderzoek is nodig voor het bepalen of grenswaarden(hyper)ellips(oïd)en een rol moeten spelen bij normering van deformatiemetingen en welke parameters van een dergelijke (hyper)ellips(oïde) moeten worden genormeerd.

Hoofdstuk 4

Analyse van positieveranderingen

4.1 Inleiding

In het voorgaande hoofdstuk is de problematiek van precisie, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van puntenvelden behandeld voor het eendimensionale geval van hoogtemetingen. In de twee- en driedimensionale situatie, waar we rechthoekige coördinaten bepalen met behulp van bijvoorbeeld total stations of GNSS-ontvangers, krijgen we met precies dezelfde kwesties te maken. Begrippen als standaardafwijking, tolerantie, grenswaarde en schranke kunnen daar op analoge wijze worden ingevoerd. Het is wel ingewikkelder. Zo is in de tweedimensionale situatie geen sprake van alleen een standaardafwijking, maar van standaardellipsen. Driedimensionaal worden het standaardellipsoiden. De waarnemingsvergelijkingen worden ingewikkelder en zijn niet meer lineair in de parameters. Maar een vergelijkbare aanpak is mogelijk als voor de eendimensionale situatie.

4.2 Eén punt en zijn positieverandering

Veronderstel dat we de positie van een punt P op een zeker tijdstip (1) kennen en wel door middel van de driedimensionale rechthoekige (cartesiaanse) coördinaten $x_P^{(1)}, y_P^{(1)}, z_P^{(1)}$. Als xy -vlak wordt genomen het plaatselijke horizontale vlak en de plaatselijke verticaal is dus de z -as. De drie coördinaten nemen we samen in de vector $\mathbf{v}_P^{(1)}$ ¹:

$$\mathbf{v}_P^{(1)} = \begin{pmatrix} x_P^{(1)} \\ y_P^{(1)} \\ z_P^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Veronderstel, dat we ook de precisie van de coördinaten kennen en wel door middel van de drie standaardafwijkingen

$$\sigma_{x_P^{(1)}}, \sigma_{y_P^{(1)}}, \sigma_{z_P^{(1)}}. \quad (4.2)$$

We nemen voor alle drie als standaardafwijking dezelfde waarde σ . Om de precisie te beschrijven hebben we ook informatie over de correlatie tussen de drie coördinaten nodig. Daarvoor gebruiken we de drie covarianties

$$\sigma_{x_P^{(1)}, y_P^{(1)}} \text{ en } \sigma_{x_P^{(1)}, z_P^{(1)}} \text{ en } \sigma_{y_P^{(1)}, z_P^{(1)}}, \quad (4.3)$$

die we alle drie voorlopig gelijk aan nul veronderstellen: er is geen correlatie. De zes sigma's nemen we

¹Met een vetgedrukte kleine letter wordt een vector aangeduid.

samen in de symmetrische covariantiematrix $\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(1)}\}$ ^{2,3}:

$$\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(1)}\} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_P}^2 & \sigma_{x_P, y_P}^{(1)} & \sigma_{x_P, z_P}^{(1)} \\ & \sigma_{y_P}^2 & \sigma_{y_P, z_P}^{(1)} \\ \text{symm.} & & \sigma_{z_P}^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

De covariantiematrix is dus gelijk aan de eenheidsmatrix, vermenigvuldigd met een factor σ^2 .

Tenslotte kennen we ook de positie van hetzelfde punt op een later tijdstip (2) en de covariantiematrix ervan: $\mathbf{v}_P^{(2)}$ en $\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(2)}\}$. Ook nu is de covariantiematrix gelijk aan de eenheidsmatrix, vermenigvuldigd met σ^2 .

De positieverandering t kunnen we berekenen met de stelling van Pythagoras. Eerst worden de coördinaatverschillen in x -, y - en z -richting bepaald:

$$x_P^{(12)} = x_P^{(2)} - x_P^{(1)}, \quad y_P^{(12)} = y_P^{(2)} - y_P^{(1)}, \quad z_P^{(12)} = z_P^{(2)} - z_P^{(1)}. \quad (4.5)$$

Zij worden gekwadrateerd, bij elkaar opgeteld en van het resultaat wordt de wortel genomen:

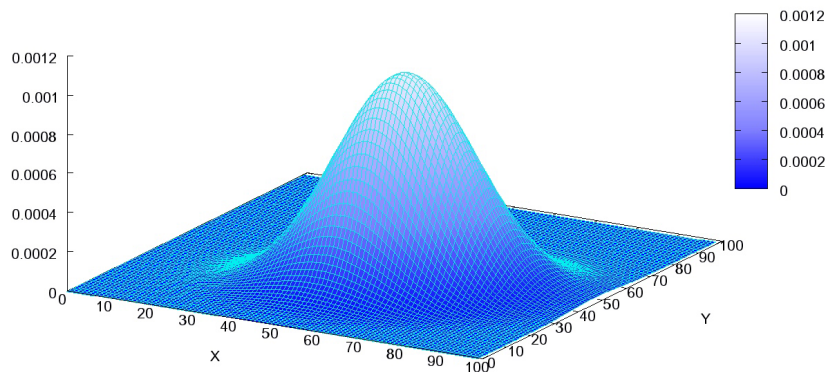
$$t = \sqrt{(x_P^{(12)})^2 + (y_P^{(12)})^2 + (z_P^{(12)})^2} \quad (4.6)$$

t kan ook worden geschreven als de norm van het verschil van de twee vectoren $\mathbf{v}_P^{(1)}$ en $\mathbf{v}_P^{(2)}$:

$$t = \|\mathbf{v}_P^{(2)} - \mathbf{v}_P^{(1)}\| \quad (4.7)$$

Deze formule lijkt sterk op formule (1) voor de hoogteverandering t uit de notitie “Precisie, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van hoogteveranderingen”.

De positieverandering t is een *nulgrootheid*, zo genoemd, omdat hij in principe nul is. We veronderstellen dat de beide vectoren $\mathbf{v}_P^{(1)}$ en $\mathbf{v}_P^{(2)}$ normaal verdeeld zijn (de kansverdeling van Gauss-Laplace volgen). De vectoren zijn driedimensionaal, waardoor de verdeling een multivariate normale verdeling is. Van de tweedimensionale situatie (we hebben een vector $\mathbf{v}$ in het platte vlak; alleen een x - en y -coördinaat) kunnen we een plaatje tekenen, zie figuur 4.1. Voor de driedimensionale situatie is dat niet mogelijk.



Figuur 4.1: Multivariate normale verdeling (bron: upload.wikimedia.org)

4.2.1 Standaardafwijking van de verandering

Om te toetsen of de positieverandering t groter is dan wat je op grond van de stochastische ruis - beschreven door de covariantiematrices van de twee positievectoren $\mathbf{v}_P^{(1)}$ en $\mathbf{v}_P^{(2)}$ - kunt verwachten, bepalen we eerst de standaardafwijking van t .

²De letter ‘D’ is van *dispersie*, een ander woord voor spreiding. De covariantiematrix beschrijft de stochastische spreiding van de coördinaten.

³Met een vetgedrukte hoofdletter wordt een matrix aangeduid.

We beginnen met het definiëren van de verschilvector $\mathbf{v}_P^{(12)}$:

$$\mathbf{v}_P^{(12)} = \mathbf{v}_P^{(2)} - \mathbf{v}_P^{(1)}. \quad (4.8)$$

Dit is een lineaire relatie, waar we de voortplantingswet voor varianties op kunnen toepassen. De covariantiematrix $\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(12)}\}$ wordt berekend als:

$$\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(12)}\} = \mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(1)}\} + \mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(2)}\} - \mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(1)}, \mathbf{v}_P^{(2)}\} - (\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(1)}, \mathbf{v}_P^{(2)}\})^T, \quad (4.9)$$

waar de bovenindex T de getransponeerde matrix aangeeft en waar de matrix $\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(1)}, \mathbf{v}_P^{(2)}\}$ de covarianties tussen $\mathbf{v}_P^{(1)}$ en $\mathbf{v}_P^{(2)}$ bevat en dus de correlatie daartussen. Als we aannemen, dat beide positievectoren niet gecorreleerd zijn, omdat ze bepaald zijn in twee geheel van elkaar onafhankelijke meetprocessen (maar wel in hetzelfde referentiestelsel), geldt:

$$\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(12)}\} = \mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(1)}\} + \mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(2)}\}. \quad (4.10)$$

Als we aannemen, zoals in vgl. (4.4), dat beide positievectoren een covariantiematrix hebben, die een eenheidsmatrix is, vermenigvuldigd met een factor σ^2 , geldt:

$$\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(12)}\} = 2\sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Vergelijking (4.7) kan worden geschreven als:

$$t = \|\mathbf{v}_P^{(2)} - \mathbf{v}_P^{(1)}\| = \sqrt{(\mathbf{v}_P^{(12)})^T \mathbf{v}_P^{(12)}}, \quad (4.12)$$

waar de bovenindex T de getransponeerde vector aangeeft. Vergelijking (4.12) maakt duidelijk, dat t niet lineair afhangt van de verschilvector $\mathbf{v}_P^{(12)}$. Om de voortplantingswet van varianties te kunnen toepassen, moet de vergelijking worden gelineariseerd. Daarvoor worden de twee differenties Δt en $\Delta \mathbf{v}_P^{(12)}$ als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t - t_0; \\ \Delta \mathbf{v}_P^{(12)} &= \mathbf{v}_P^{(12)} - \mathbf{v}_{P0}^{(12)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

waar t_0 de benaderde waarde van t is en $\mathbf{v}_{P0}^{(12)}$ de benaderde waarde is van $\mathbf{v}_P^{(12)}$.

De gelineariseerde vergelijking is:

$$\Delta t = \left(\frac{\mathbf{v}_P^{(12)}}{t}\right)_0^T \Delta \mathbf{v}_P^{(12)}. \quad (4.14)$$

Met de onderindex 0 wordt aangeduid, dat in de betreffende vector benaderde waarden worden gebruikt.

Op de gelineariseerde vergelijking kan de voortplantingswet voor varianties worden toegepast:

$$\sigma_t^2 = \left(\frac{\mathbf{v}_P^{(12)}}{t}\right)_0^T \mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(12)}\} \left(\frac{\mathbf{v}_P^{(12)}}{t}\right)_0. \quad (4.15)$$

Als we aannemen, dat de covariantiematrix $\mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(12)}\}$ de eenvoudige structuur van vgl. (4.11) heeft, geldt:

$$\sigma_t^2 = 2\sigma^2 \left(\frac{\mathbf{v}_P^{(12)}}{t}\right)_0^T \left(\frac{\mathbf{v}_P^{(12)}}{t}\right)_0 = 2\sigma^2 \frac{t^2}{t^2} = 2\sigma^2. \quad (4.16)$$

In dit geval is de standaardafwijking van t gelijk aan $\sqrt{2}\sigma$.

4.2.2 Toetsing van de verandering

De toetsing van de positieverandering t kan echter niet op dezelfde wijze plaatsvinden als de toetsing van de hoogteverandering t . Dat komt, omdat t nu niet normaal verdeeld is. Dat zien we al daaraan, dat t van vergelijking (4.6) geen negatieve waarden kan aannemen en de verwachtingswaarde van t dus ook niet nul is.

Naar analogie van het toetsen van de *hoogte*verandering t definiëren we voor de *positie*verandering t de toetsingsgrootte w als:

$$w = \frac{t}{\sigma_t} \quad (4.17)$$

Helaas is deze w niet standaardnormaal verdeeld. Het is zelfs niet direct duidelijk welke kansverdeling hij in het meest algemene geval dan wel heeft. We leiden daarom eerst een toetsingsgrootte af, waarvan we de kansverdeling wel kennen en laten dan zien onder welke voorwaarden we de kansverdeling van (4.17) kennen. Daarmee wordt ook duidelijk hoe de toetsing van de positieverandering kan plaatsvinden.

4.2.2.1 Toetsingsgrootte

De grootte t is volgens vgl. (4.7) de lengte (de Euclidische norm) van de vector $\mathbf{v}_P^{(12)}$. In plaats van vgl. (4.7) berekenen we nu de lengte van $\mathbf{v}_P^{(12)}$ rekening houdend met diens covariantiematrix⁴.

Voor de overzichtelijkheid definiëren we:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_P^{(12)} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}\{\mathbf{v}_P^{(12)}\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

De nulgrootte t' wordt gedefinieerd als:

$$t' = \mathbf{v}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v} \quad (4.19)$$

Nu wordt niet de wortel genomen, zodat t' het kwadraat van t is, als voor $\mathbf{D}$ de eenheidsmatrix wordt genomen.

Als de vectoren $\mathbf{v}_P^{(1)}$ en $\mathbf{v}_P^{(2)}$ normaal verdeeld zijn en omdat vgl. (4.8) lineair is, is de vector $\mathbf{v}$ ook normaal verdeeld. De verwachtingswaarde is de nulvector (als er geen deformatie is) en de covariantiematrix is $\mathbf{D}$. Daarom heeft t' een χ^2 -verdeling (chikwadratverdeling) (Velsink, 1998, deel 3, bijlage A), zie figuur 4.2. Toetsing van t' is mogelijk door kritieke waarden te berekenen, behorend bij het gewenste significantieniveau. De verwachtingswaarde van t' is gelijk aan 3 in 3D en 2 in 2D.

Een aantal kritieke waarden is in tabel 4.1 opgenomen.

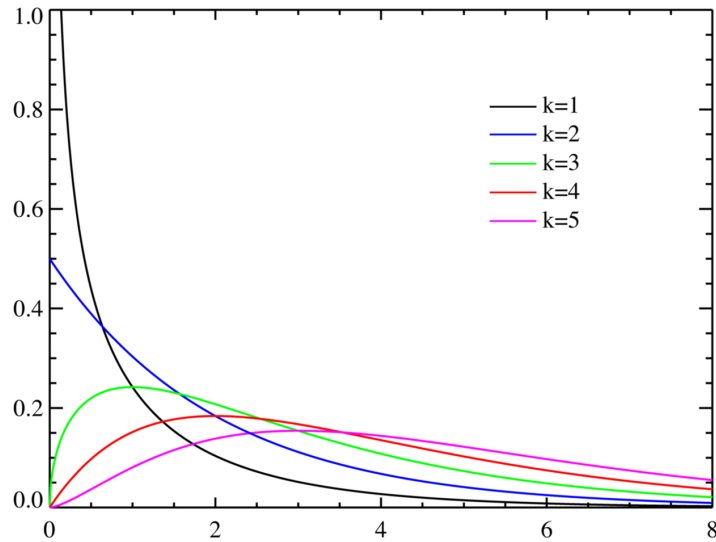
k	<i>significantieniveau</i>	
	0,1%	5%
1	10,828	3,841
2	13,816	5,991
3	16,266	7,815
10	29,588	18,307
100	149,449	124,342

Tabel 4.1: Kritieke waarden χ^2 -verdeling

In plaats van t' zelf kan als toetsingsgrootte worden genomen:

$$F_{n,\infty} = \frac{t'}{k} \quad (4.20)$$

⁴In plaats van het standaard inwendig product wordt nu het gegeneraliseerde inwendig product gebruikt om de norm van een vector te berekenen (Velsink, 1998, deel 2)



Figuur 4.2: χ^2 -verdeling (bron: nl.wikipedia.org)

waar k het aantal vrijheidsgraden van de toets is, 2 voor 2D en 3 voor 3D⁵. De kritieke waarden zijn die van de χ^2 -verdeling, gedeeld door k .

4.2.2.2 Gelijke precisie, geen correlatie

Als de coördinaten van punt P in epoche 1 en 2 zowel onderling als tussen de epochen niet gecorreleerd zijn en als alle coördinaten een gelijke standaardafwijking hebben, heeft $\mathbf{D}$ de eenvoudige structuur van vgl. (4.11). Voor t' geldt nu:

$$t' = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{2\sigma^2} = \frac{t^2}{2\sigma^2} \quad (4.21)$$

De wortel trekkend krijgen we:

$$\sqrt{t'} = \frac{t}{\sigma_t} = w \quad (4.22)$$

De kansverdeling van w is dus onder de voorwaarde van geen correlatie en gelijke standaardafwijkingen een χ -verdeling (chi-verdeling, zie figuur 4.3) met drie vrijheidsgraden (twee vrijheidsgraden als er alleen x - en y -coördinaten zijn). Dat volgt uit het feit, dat het kwadraat van w de χ^2 -verdeling heeft.

De kritieke waarde van de χ -verdeling bij een significantieniveau van 5% is 2,80 voor 3D en 2,45 voor 2D. Vergelijk de waarde van 1,96 voor 1D.

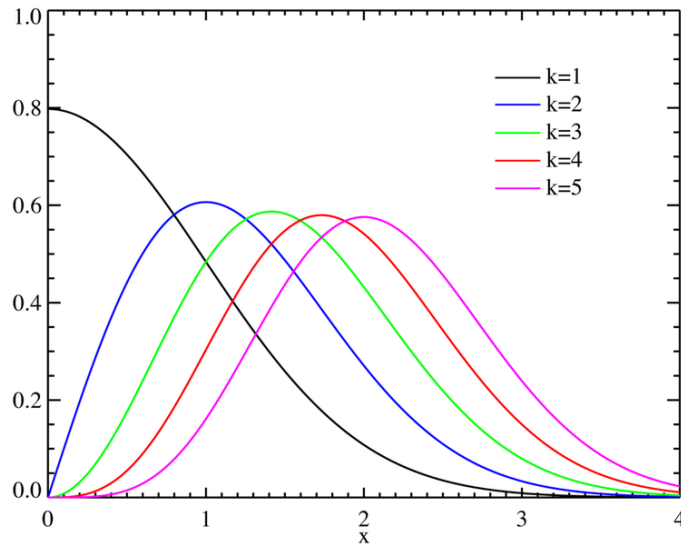
De kritieke waarde bij een significantieniveau van 0,1% is 4,03 voor 3D en 3,72 voor 2D. Vergelijk de waarde van 3,29 voor 1D.

Praktisch gevolg Laten de normaal verdeelde x - en y -coördinaten van een punt (dus in 2D) bekend zijn op twee epochen, laat de standaardafwijking van alle gelijk zijn en laat er geen enkele correlatie zijn. Het x - en y -verschil tussen beide epochen kunnen worden bepaald. Daaruit kan de lengte van de verschilvector worden berekend. De standaardafwijking van deze lengte is $\sqrt{2}$ keer de standaardafwijking van de enkele coördinaat, zie vgl. (4.16). De lengte van de verschilvector wijkt significant af van nul, met een significantieniveau van 5%, als de lengte groter is dan $2,45 \cdot \sqrt{2} = 3,46$ keer de standaardafwijking van de enkele coördinaat.

In de Nederlandse geodesie is het gebruikelijk de B-methode van toetsen toe te passen. De gedachte achter de B-methode⁶ is, dat een afwijking (deformatie) ter grootte van de eendimensionale grenswaarde

⁵F komt van de naam 'Fishertoets' en het oneindigheidssteken ∞ is, omdat de Fishertoets wordt gebruikt met in de noemer een oneindig aantal vrijheidsgraden.

⁶De B is een afkorting van "breedte", een vroeger gebruikte aanduiding voor het eendimensionale variatiegebied van een stochastische variabele (Baarda, 1968a, blz. 3)



Figuur 4.3: χ -verdeling (bron: commons.wikimedia.org)

met hetzelfde onderscheidingsvermogen wordt opgespoord met de eendimensionale toets als met toetsen van een hogere dimensie (Baarda, 1968a,b). Er wordt een waarde voor het significantieniveau gekozen voor de eendimensionale toets (bijvoorbeeld 0,1%). Vervolgens wordt de niet-centraliteitsparameter van de χ^2 -verdeling, behorende bij een vastgesteld onderscheidingsvermogen (bijvoorbeeld 80%) berekend. Voor de genoemde 0,1% en 80% is de niet-centraliteitsparameter 17,075. Vervolgens wordt het bij die niet-centraliteitsparameter en dat onderscheidingsvermogen behorend significantieniveau van een meerdimensionale toets berekend. Tabel 4.2 bevat enkele parameterwaarden volgens de B-methode van toetsen.

niet-centraliteits- parameter	vrijheidsgraden k	significantieniveau in %	kritieke waarde χ^2/k	kritieke waarde χ
17,075	1	0,1	10,83	3,29
17,075	2	0,28	5,87	3,42
17,075	3	0,55	4,21	3,55
7,849	1	5	3,84	1,96
7,849	2	9,52	2,35	2,17
7,849	3	13,47	1,85	2,36

Tabel 4.2: Waarden B-methode van toetsen
Onderscheidingsvermogen = 80%

Praktisch gevolg Voor het eerder gegeven voorbeeld van een in 2D in twee epochen bepaald punt, waar de standaardafwijkingen alle gelijk zijn en correlatie ontbreekt, geldt bij toepassing van de B-methode van toetsen het volgende. De lengte van de verschilvector wijkt significant af van nul, met een significantieniveau van 0,28%, als de lengte groter is dan $\sqrt{2} \cdot 3,42 = 4,84$ keer de standaardafwijking van de enkele coördinaat.

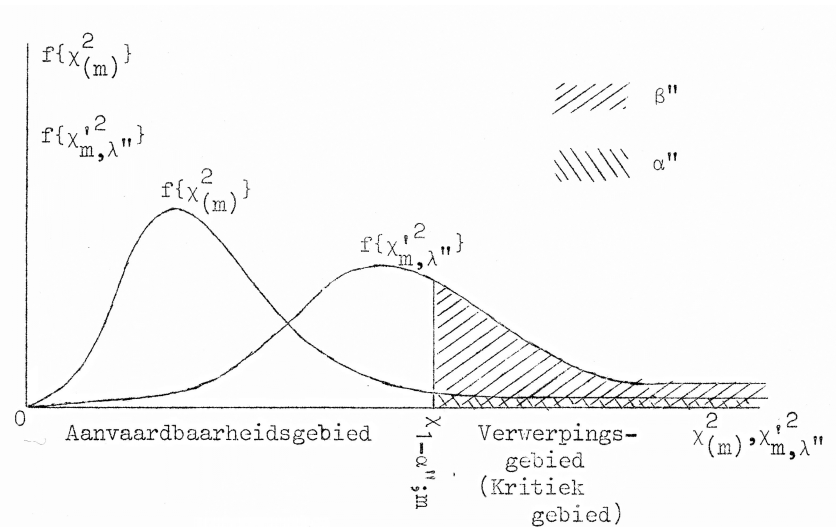
4.2.3 Grenswaarde van de opspoorbare deformatie

4.2.3.1 Grenswaarde-ellips(oïde)

De kritieke waarde van de toets op een significante afwijking van nul van de lengte van de verschilvector is niet de deformatie die met de toets met een kans van bijvoorbeeld 80% gevonden kan worden. Dat laatste is de grenswaarde.

Als een deformatie aanwezig is, heeft de nulgrootheid t' van vgl. (4.19) een niet-centrale χ^2 -verdeling. De verwachtingswaarde van t' is nu niet gelijk aan k (het aantal vrijheidsgraden: 2 voor 2D en 3 voor

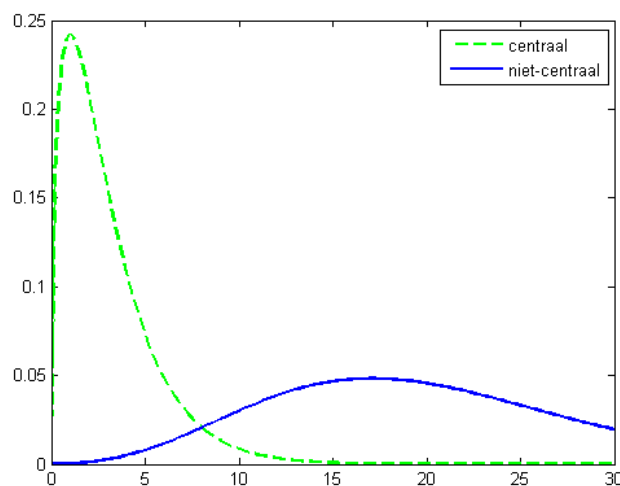
3D), maar gelijk aan $k + \lambda$, met λ de niet-centraliteitsparameter. De kans dat de toets tot verwerping leidt, aangegeven in figuur 4.4 met β'' , wordt het onderscheidingsvermogen genoemd. Deze kans is groter dan het significantieniveau, dat is aangegeven met α'' .



Figuur 4.4: Centrale en niet-centrale χ^2 -verdeling (uit: Baarda (1968a))

Laten we eerst naar de eendimensionale toets kijken. Als er een deformatie is ter grootte van $\lambda = 17,075$ en er getoetst wordt met een significantieniveau van 0,1%, is het onderscheidingsvermogen 80 %. Als we willen, dat een twee- of driedimensionale toets met hetzelfde onderscheidingsvermogen de deformatie vindt, kan uit de centrale en de niet-centrale χ^2 -verdeling worden afgeleid, welk significantieniveau voor de twee- en driedimensionale toets moet worden genomen. Dit is wat de B-methode van toetsen doet.

In figuur 4.5 is de niet-centrale χ^2 -verdeling voor $\lambda = 17,075$ afgebeeld (doorgetrokken lijn) ten opzichte van de centrale χ^2 -verdeling (onderbroken lijn) voor het geval, dat het aantal vrijheidsgraden drie is.



Figuur 4.5: Niet-centrale χ^2 -verdeling met $\lambda_0 = 17.075$
Het aantal vrijheidsgraden k is 3
Getekend met Matlab

Welke deformatie werkelijk is gemaakt, en dus hoe groot λ werkelijk is, is in het algemeen onbekend. Om toch een uitspraak te kunnen doen over de "kracht" van de toetsmethode, wordt berekend welke

deformatie met een onderscheidingsvermogen van bijvoorbeeld 80% gevonden kan worden. Laten we dit onderscheidingsvermogen β_0 noemen⁷. Laten we het significantieniveau van de eendimensionale toets α_0 noemen. Zoals eerder is vermeld, wordt meestal $\alpha_0 = 5\%$ genomen, maar in de Nederlandse geodesie in het algemeen $\alpha_0 = 0, 1\%$.

Door de keuze van α_0 en β_0 wordt de waarde van λ vastgelegd. Dat is λ_0 , de *grenswaarde* van de niet-centraliteitsparameter. Het geeft de deformatie, die in de vector $\mathbf{v}$ aanwezig is, maar als afgeleide grootte. Vector $\mathbf{v}$ kan worden beschouwd als de som van een vector $\mathbf{v}_n$, die het verschil aangeeft, als er géén deformatie is, en een vector $\mathbf{v}_0$, die de deformatie beschrijft:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_0. \quad (4.23)$$

De vector $\mathbf{v}_n$ is een stochastische vector en de verwachtingswaarde ervan is de nulvector: $E\{\mathbf{v}_n\} = \mathbf{0}$. De vector $\mathbf{v}_0$ is de deformatievector en deze is niet stochastisch: $E\{\mathbf{v}_0\} = \mathbf{v}_0$. Als toetsingsgrootte is genomen $t' = \mathbf{v}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}$. De verwachting van t' is k als er geen deformatie is. Als er wel een deformatie is ter grootte van λ_0 , geldt:

$$E\{t'\} = k + \lambda_0, \quad (4.24)$$

wat volgt uit het feit, dat t' een niet-centrale χ^2 -verdeling heeft. De verwachtingswaarde van t' is ook te bepalen door gebruik te maken het feit, dat de operator $E\{\cdot\}$ lineair is. Dat betekent, dat voor willekeurige constante scalars α, β en c en willekeurige stochastische scalars a en b geldt:

$$E\{\alpha a + \beta b + c\} = \alpha E\{a\} + \beta E\{b\} + c. \quad (4.25)$$

Hieruit volgt, dat voor het product van een constante vector $\mathbf{c}$ en een stochastische vector $\mathbf{s}$, geldt:

$$E\{\mathbf{c}^T \mathbf{s}\} = \mathbf{c}^T E\{\mathbf{s}\} \text{ en ook } E\{\mathbf{s}^T \mathbf{c}\} = E\{\mathbf{s}^T\} \mathbf{c}. \quad (4.26)$$

Voor de verwachtingswaarde van t' volgt:

$$\begin{aligned} E\{t'\} &= E\{\mathbf{v}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}\} = E\{(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_0)^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_0)\} = \\ &= E\{\mathbf{v}_n^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}_n\} + \mathbf{v}_0^T \mathbf{D}^{-1} E\{\mathbf{v}_n\} + E\{\mathbf{v}_n^T\} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}_0 = \\ &= k + \mathbf{v}_0^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Uit combinatie van vgl. (4.24) en (4.27) volgt:

$$\lambda_0 = \mathbf{v}_0^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}_0. \quad (4.28)$$

De waarden van λ_0 en de covariantiematrix $\mathbf{D}$ zijn bekend. In 2D beschrijft vgl. (4.28) een ellips, in 3D een ellipsoïde. Dit betekent:

De deformatie, die met een kans β (meestal wordt gekozen: $\beta = 80\%$) gevonden kan worden door het toetsen van de verschilvector $\mathbf{v}$ met behulp van een χ^2 -toets, is een vector $\mathbf{v}_0$, die niet eenduidig is bepaald, maar waarvoor geldt, dat hij ligt op een ellips (in 2D) of een ellipsoïde (in 3D) rond het nulpunt. De ellips(oïde) wordt bepaald door vgl. (4.28). Deze ellips(oïde) heet de *grenswaarde-ellips(oïde)*.

4.2.3.2 Gelijke precisie, geen correlatie

Veronderstel, dat alle coördinaten onderling niet zijn gecorreleerd en alle dezelfde standaardafwijking hebben, ofwel vgl. (4.11) geldt. Dan geldt:

$$\lambda_0 = \frac{\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0}{2\sigma^2}. \quad (4.29)$$

De lengte van de verschilvector $\mathbf{v}$ is gelijk aan $\sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$. Daarom berekenen we:

$$\sqrt{\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0} = \sqrt{2\lambda_0} \sigma \quad (4.30)$$

Dit betekent het volgende.

⁷Een waarschuwing: prof. Baarda duidde het onderscheidingsvermogen met de letter β aan. Daarom gebeurt dat ook hier. In recente literatuur wordt echter de letter γ gebruikt, terwijl met β wordt bedoeld, wat hier $1 - \beta$ is, zie bijvoorbeeld [wikipedia](https://nl.wikipedia.org/wiki/Significantieniveau).

Praktisch gevolg De grenswaarde van de lengte van de verschilvector, die gevonden wordt met het toetsen van de verschilvector (vgl. (4.12)), is gelijk aan $\sqrt{2\lambda_0}$ keer de standaardafwijking van de enkele coördinaat, als vgl. (4.11) geldig is.

Als gekozen is voor een eendimensionaal significantieniveau van 0,1% en een onbetrouwbaarheidsdrempel van 80%, geldt $\lambda_0 = 17,075$ en is de grenswaarde van de lengte van de verschilvector gelijk aan 5,84 keer de standaardafwijking van de enkele coördinaat.

Voor een eendimensionaal significantieniveau van 5% en een onbetrouwbaarheidsdrempel van 80% is het 3,96 keer de standaardafwijking van de enkele coördinaat.

4.2.3.3 Ongelijke standaardafwijkingen en correlatie

Als de coördinaten een gelijke standaardafwijking hebben en niet zijn gecorreleerd, beschrijft vgl. (4.28) een cirkel (2D) of een bol (3D). De grenswaardenvector $\mathbf{v}_0$ is niet eenduidig bepaald (niet duidelijk is, in welke richting hij wijst), maar hij heeft wel een bekende lengte (nl. de straal van de cirkel of bol). Daardoor is het praktische gevolg aan het einde van de vorige paragraaf op eenvoudige wijze te formuleren.

Als de coördinaten niet alle dezelfde standaardafwijking hebben of gecorreleerd zijn, wordt de cirkel of bol een ellips of ellipsoïde. Het praktische gevolg is nu niet meer zo eenvoudig te formuleren. Een ellips of ellipsoïde wordt gekenmerkt door de lengte van de twee of drie hoofdassen van de ellips(oïde) en de richtingen van de hoofdassen. De hoofdassen vallen in het algemeen niet samen met de coördinaatassen.

Om te beschrijven wat de grenswaarden zijn van de opspoorbare deformaties is het voor de hand liggend twee of drie getallen te geven, de halve lengtes van de twee of drie hoofdassen.

4.2.3.4 Normstelling

Een norm voor de minimaal opspoorbare deformatie van een enkel punt kan worden bepaald, door een cirkel of bol vast te stellen, waarbinnen de grenswaarde-ellips(oïde) moet liggen. Dit kan echter een te strenge norm zijn, als men een deformatie in een bepaalde richting verwacht. Dan ligt het voor de hand de projectie van de ellips(oïde) op de as door het middelpunt in die richting aan een norm te binden.

4.2.3.5 Effect van correlatie

De vorige paragrafen hebben getoond, dat het ontbreken van correlatie tot eenvoudiger formules leidt voor de toetsing en de kwaliteitsbeschrijving (de grenswaarde-ellipsoiden). Correlatie is in de praktijk echter vaak niet nul. Wat is het effect van het toch verwaarlozen ervan?

Veronderstel dat vanuit één opstelpunt een aantal detailpunten wordt aangemeten met een total station. De metingen worden ingevoerd in MOVE3⁸ en vereffend. Standaard wordt geen informatie uitgevoerd over de covariantiematrix van de berekende coördinaten, maar door het aanvinken van het juiste vakje is dat wel mogelijk. De correlatiecoëfficiënt ρ_{xy} tussen bijvoorbeeld de x - en y -coördinaat van een punt wordt berekend met de formule:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (4.31)$$

met σ_{xy} de covariantie tussen x en y , σ_x de standaardafwijking van x en σ_y de standaardafwijking van y . De standaardafwijking is de wortel van de variantie die in de covariantiematrix staat.

Het blijkt, dat de correlatiecoëfficiënt in dit eenvoudige voorbeeld absolute waarden aanneemt van bijna nul (vrijwel geen correlatie) tot bijna één (vrijwel volledige correlatie). Dit is te begrijpen, omdat de coördinaten worden berekend uit richtings- en afstandsmetingen, die in het algemeen niet evenwijdig aan de x -, y - of z -as worden uitgevoerd. Een stochastische variatie in bijvoorbeeld de afstandsmeting zal invloed hebben op alle drie coördinaten van het aangemeten punt, die daardoor gecorreleerd zijn.

Als de coördinaten worden bepaald met een andere meettechniek, bijvoorbeeld fotogrammetrisch, is het ook aannemelijk, dat de x -, y - en z -coördinaat van een punt gecorreleerd zijn. Onderzoek hiernaar is

⁸MOVE3, versie 4.3.0 (move3software.com)

gedaan in de tachtiger jaren van de vorige eeuw (Förstner, Ligterink, Puk Nee Voon) (*hier moet nog nader naar worden gekeken*).

Alleen als de meettechniek en de coördinaatassen zodanig zijn gekozen, dat de x -, y - en z -coördinaat onafhankelijk van elkaar worden bepaald, kan worden aangenomen, dat de correlatie verwaarloosbaar is.

Veronderstel dat de correlatiecoëfficiënt tussen het x - en y -verschil voor een bepaald punt 0,5 is en dat we de 2D-situatie beschouwen. We vergelijken de situatie met een matrix $\mathbf{D}_z$ zonder correlatie en $\mathbf{D}_m$ met correlatie.

$$\text{Zonder correlatie: } \mathbf{D}_z = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en met correlatie: } \mathbf{D}_m = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Voor de grenswaarde-ellips *zonder* correlatie volgt uit vgl. (4.28), met x de x -coördinaat van $\mathbf{v}_0$ en y diens y -coördinaat:

$$\sigma^2 \lambda_0 = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2. \quad (4.33)$$

Voor de grenswaarde-ellips *met* correlatie geldt:

$$\sigma^2 \lambda_0 = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{3}xy. \quad (4.34)$$

Vgl. (4.33) beschrijft een cirkel met straal $\sqrt{2\lambda_0}\sigma = 1,4\sqrt{\lambda_0}\sigma$. Vgl. (4.34) beschrijft een ellips met een halve lange as van $\sqrt{3\lambda_0}\sigma = 1,7\sqrt{\lambda_0}\sigma$ en een halve korte as van $\sqrt{\lambda_0}\sigma$. In bijlage B (blz. 86) staat de afleiding.

De halve lange as van de ellips (met correlatie) is 22% langer dan de straal van de cirkel (zonder correlatie). De halve korte as is 29% korter. De correlatie heeft dus een merkbare invloed op de toets. De conclusie moet zijn, dat in het algemeen de correlatie niet zomaar kan worden verwaarloosd.

4.2.4 Via de methode van de kleinste kwadraten

De resultaten verkregen in de voorgaande paragrafen kunnen ook via de kleinste-kwadratenmethode worden verkregen, zoals dat voor een gemeten hoogteverschil is gedaan in paragraaf 3.2.5. Dat wordt hier niet verder uitgewerkt. Vanaf paragraaf 4.3 worden de resultaten berekend als niet de deformatie van één, maar de deformaties van een puntenveld van drie of meer punten worden geanalyseerd. De analyse is dan alleen mogelijk door inschakeling van de methode van de kleinste kwadraten.

4.2.5 Conclusies over één punt en zijn positieverandering

We hebben gezien hoe de precisie van de positie van één punt wordt beschreven door een covariantiematrix en hoe het verschil in positie van hetzelfde punt op twee tijdstippen kan worden getoetst. De grenswaarde van de opspoorbare deformatie is behandeld, evenals de invloed van correlatie.

De volgende conclusies kunnen worden getrokken.

1. De toetsing van de lengte van een verschilvector kan plaatsvinden met gebruikmaking van de χ -verdeling, als de uitgangscoördinaten worden verondersteld normaal verdeeld te zijn. De kritieke waarde voor 2D en 3D wijkt af van de waarde voor 1D bij hetzelfde significantieniveau.
2. De opspoorbare deformatie kan worden beschreven met een grenswaarde-ellips (2D) of grenswaarde-ellipsoïde (3D).
3. Als de x - en y -coördinaat van een punt een gelijke standaardafwijking hebben en niet zijn gecorreleerd, is de grenswaarde van de lengte van de verschilvector, die gevonden wordt met het toetsen van de verschilvector, gelijk aan $\sqrt{2\lambda_0}$ keer de standaardafwijking van de enkele coördinaat.
4. In het algemeen kan niet worden aangenomen dat de x - en y -coördinaat van een punt niet zijn gecorreleerd. De correlatie heeft een merkbare invloed op de toetsing en kwaliteitsbeschrijving.

5. Normstelling kan plaatsvinden door normen voor de grenswaarde-ellips of grenswaarde-ellipsoïde vast te stellen.

Wat niet is behandeld, is de vraag hoe men aan de covariantiematrix van een positie van een enkel punt komt en wat de betekenis daarvan is. Om dat te bepalen kan een punt niet los worden gezien van het puntenveld, waar het deel van uitmaakt. In het volgende hoofdstuk wordt daarom vanuit de precisiebeschrijving van een puntenveld de problematiek van toetsing en kwaliteitsbeschrijving behandeld.

4.3 Puntenveld en relatieve puntposities

Bij de behandeling van de precisie, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van *hoogte* veranderingen is getoond, dat de punthoogte volgens de theoretische definitie (de metrische afstand van het punt langs de gekromde loodlijn tot aan het equipotentiaalvlak door het NAP-nulpunt) niet rechtstreeks gemeten kan worden. De hoogte wordt bepaald door het hoogteverschil met andere punten te meten. Zelden tot nooit zullen de verschilmetingen doorgezet worden tot aan het NAP-nulpunt. Daardoor is men afhankelijk van de precisie van aansluitingspunten, die in het algemeen door anderen zijn gemeten. Daar komt bij, dat men in het algemeen slechts geïnteresseerd is de hoogteverschillen ten opzichte van punten in de nabije of verdere omgeving en niet ten opzichte van het NAP-nulpunt. Daarom heeft het spreken over de precisie van een punthoogte los van andere aangemeten punten in het algemeen geen zin. Schrancking is noodzakelijk om de precisie - en daarmee ook toetsing en kwaliteitsbeschrijving - een zinvolle betekenis te geven. Bovendien wordt de toetsing scherper. Door de schrancking wordt de precisie een *relatieve* precisie.

Op dezelfde wijze moet bij de beschouwing van de covariantiematrix van de *positie* van een enkel punt de vraag gesteld worden, ten opzichte waarvan de covariantiematrix de precisie beschrijft. Als de positie wordt beschreven met rechthoekige coördinaten, is meestal het theoretische coördinatenstelsel gedefinieerd ofwel in een projectievlak (bijv. het RD-stelsel) ofwel ten opzichte van het massacentrum van de aarde, de omwentelingsas van de aarde en de lengtegraad van Greenwich (bijv. WGS84). De coördinaatassen zijn geen fysiek aanwijsbare grootheden en het meten van de afstanden van een punt tot deze assen is daarom als rechtstreekse meting niet mogelijk. Het coördinatenstelsel wordt *operationeel gedefinieerd* door een aantal primaire punten (Laplacepunten in het geval van het oude RD-stelsel, tegenwoordig de AGRS-punten⁹, in het geval van GPS de volgstations). Verdichting van deze punten levert de aansluitingspunten waaraan lokale metingen kunnen worden aangesloten. Ook nu geldt: enerzijds is men voor het bepalen van de precisie van de positie van een lokaal punt afhankelijk van de precisie van aansluitingspunten, waarvoor men op anderen moet vertrouwen, anderzijds is men in het algemeen slechts geïnteresseerd in de precisie ten opzichte van punten in de nabije of verdere omgeving. Ook nu geldt daarom, dat schrancking noodzakelijk is om coördinaten betekenis te geven.

Wat schrancking inhoudt in het geval van twee- en driedimensionale coördinaten, vergt meer toelichting dan in het geval van eendimensionale hoogteverschillen. Voor deformatieanalyse komt daarbij, dat een dergelijke analyse gaat over de vormverandering van een puntenveld, dat een deformerend object presenteert. Hoe de vorm van een object is gedefinieerd en hoe coördinaten de vorm kunnen vastleggen, vergt eveneens meer toelichting. Dit hoofdstuk begint daarom met het ingaan op de begrippen “vorm” en “grootte”.

4.3.1 Vorm en grootte

Het woord “deformatie” komt van het Latijnse woord “deformare”, dat misvormen betekent en waarin het woord “forma” (vorm) zit. De geodetische deformatieanalyse bestudeert de vormverandering van objecten. Het begrip “vorm” wordt gedefinieerd door te definiëren, wanneer twee objecten een gelijke vorm hebben:

Twee objecten zijn gelijkvormig, wanneer alle overeenkomstige hoeken gelijk zijn en alle afstanden vergroot (of verkleind) zijn in dezelfde verhouding, de vergrotingsfactor genoemd

⁹AGRS - Actief GNSS-ReferentieSysteem, zie www.AGRS.nl

(Coxeter and Greitzer 1967, p. 94)^{10,11}. De transformatie van de vorm van een object naar die van een ander, gelijkvormig object heet een gelijkvormigheidstransformatie.

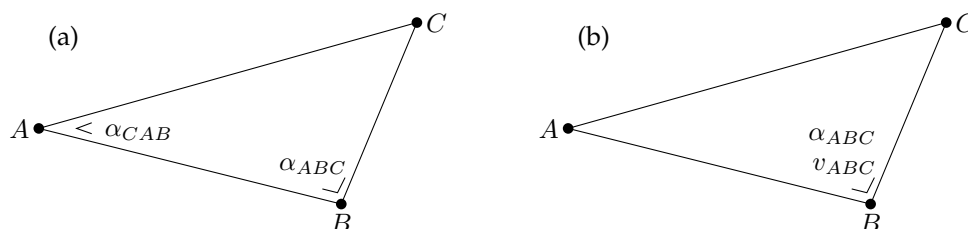
Een ander woord voor “gelijkvormig” is *conform*, waarin weer het Latijnse “forma” is te herkennen.

Als geen vergroting of verkleining van de afstanden nodig is (de vergrotingsfactor is 1) zijn de objecten *congruent*; ze hebben niet alleen dezelfde vorm, maar ook dezelfde grootte. De congruentietransformatie (ook directe isometrie genoemd) transformeert het ene object naar het andere zonder de vorm of grootte te veranderen.

4.3.1.1 Tweedimensionaal, plat vlak

In het tweedimensionale, platte vlak (een Euclidische tweedimensionale ruimte) is een drietal punten het kleinste aantal punten, waarmee een hoek is te definiëren en waarvoor het dus zinvol is over de vorm ervan te spreken. De drie punten vormen een driehoek. De vorm van de driehoek is vastgelegd als twee hoeken bekend zijn (figuur 4.6(a)). De grootte van de driehoek is vastgelegd, als één van de afstanden bekend is. De vorm en grootte van de driehoek zijn derhalve vastgelegd, als twee hoeken en een afstand bekend zijn. Zij zijn echter ook vastgelegd, als alleen de drie afstanden (AB , BC , AC) bekend zijn. Prof. Baarda heeft erop gewezen (Baarda, 1966a), dat alleen de vorm, zonder de grootte, kan worden vastgelegd door twee lengteverhoudingen, bijvoorbeeld:

$$v_{CAB} = \frac{AB}{AC} \text{ en } v_{ABC} = \frac{AB}{BC}. \quad (4.35)$$



Figuur 4.6: Vorm van een driehoek: α_{CAB} , α_{ABC} : hoeken; v_{ABC} : lengteverhouding

Ook de combinatie van een hoek en een lengteverhouding legt de vorm vast¹², bijvoorbeeld (zie figuur 4.6(b)) α_{ABC} en v_{ABC} . Baarda (1966a) neemt beide samen in één grootheid, de Π -grootheid, die hij als complex getal schrijft:

$$\Pi_{ABC} = \ln v_{ABC} + i \alpha_{ABC}. \quad (4.36)$$

Met “ln” wordt de natuurlijke logaritme aangeduid. Het voordeel van het nemen van de natuurlijke logaritme is het ontstaan van een mooie analogie tussen de hoek en de lengteverhouding:

$$\begin{aligned} \ln v_{ABC} &= \ln BC - \ln BA; \\ \alpha_{ABC} &= r_{BC} - r_{BA}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

met r_{BC} en r_{BA} de richtingen van B naar respectievelijk C en A .

De Π -grootheid geeft de mogelijkheid de vorm van drie punten vast te leggen in één grootheid. Het is meteen inzichtelijk, dat er drie Π -grootheden zijn, die de vorm van een driehoek kunnen vastleggen. Elk van de drie is uit elk van de andere twee te bepalen.

Bij uitbreiding van het aantal punten wordt de vorm van bijvoorbeeld vijf punten vastgelegd door drie Π -grootheden. In het algemeen: de vorm van een puntenveld van n punten in het platte vlak wordt vastgelegd door $(n - 2)$ Π -grootheden.

¹⁰Vertaling van: <http://mathworld.wolfram.com/Similar.html>

¹¹De definitie impliceert, dat de begrippen “hoek” en “afstand” gedefinieerd zijn. Wiskundig betekent dit, dat in een inwendig-productruimte wordt gewerkt.

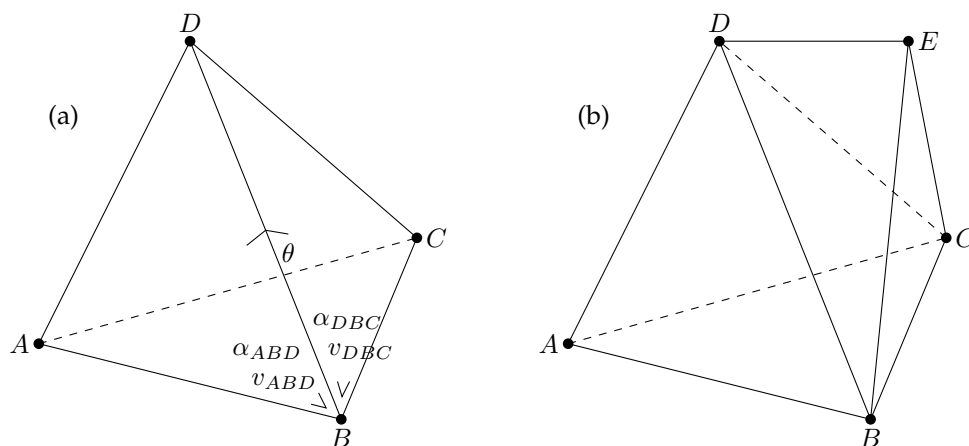
¹²Baarda (1966a, blz. 27) wijst erop, dat ook een hoek als lengteverhouding is gedefinieerd, nl. de booglengte gedeeld door de straal. Daarmee is de lengteverhouding fundamenteeler dan de hoek.

De Π -grootheden worden in de geodetische praktijk bepaald door metingen van afstanden en richtingen uit te voeren. Als meer metingen worden uitgevoerd dan nodig zijn om alle benodigde Π -grootheden te bepalen, is vereffening en daarmee ook toetsing en kwaliteitsbeschrijving van de metingen mogelijk. Gebruikelijk wordt hiervoor de methode van de kleinste kwadraten ingezet.

De Π -grootheid is de fundamentele *vormgrootheid* in de Euclidische tweedimensionale ruimte. Bij deformatieanalyse gaat het om de *vormverandering* en dus om de wijzigingen in de Π -grootheden.

4.3.1.2 Driedimensionale Euclidische ruimte

In de driedimensionale Euclidische ruimte is vier het kleinste aantal punten, waarvoor de vorm kan worden vastgelegd en alle punten in het algemeen niet in een tweedimensionale deelruimte liggen. De vier punten vormen een viervlak, zie figuur 4.7(a). Vijf vormelementen zijn nodig om de vorm van het viervlak vast te leggen (van Mierlo, 1976, blz. 5). Dat is te zien in figuur 4.7(a): de vorm van de driehoek ABD wordt vastgelegd door een Π -grootheid: α_{ABD} en v_{ABD} . Hetzelfde geldt voor de driehoek DBC . Als de stand θ van ABD ten opzichte van DBC bekend is, ligt de vorm van het gehele viervlak vast.



Figuur 4.7: Vier en vijf punten; α : hoek; v : lengteverhouding; θ : standhoek

Bij vijf punten (figuur 4.7(b)) zijn acht vormelementen nodig. Voor de vorm van de driehoek BCE is één Π -grootheid (twee vormelementen) nodig en om de stand van deze driehoek ten opzichte van de andere driehoeken te bepalen is nog een derde vormelement nodig. Met elk extra punt zijn drie extra vormelementen nodig. De vorm van een puntenveld van n punten wordt aldus vastgelegd door $5 + (n - 4) * 3 = (3n - 7)$ vormelementen.

In de tweedimensionale Euclidische ruimte kan een puntenveld opgedeeld worden in driehoeken (Delaunaytriangulatie), waarna voor elke driehoek een Π -grootheid de vorm vastlegt en het hele puntenveld door een verzameling Π -grootheden wordt vastgelegd. In de driedimensionale ruimte is de opzet complexer. Tussen de punten moeten voor een deel van de driehoeken de Π -grootheden worden vastgelegd en vervolgens moeten (stand)hoeken tussen deze driehoeken bekend zijn om het totaal van $(3n - 7)$ vormelementen te verkrijgen.

De vormelementen kunnen gebundeld worden als volgt.

- Ga uit van één van de driehoeken, bijvoorbeeld driehoek ABD in figuur 4.7. Neem van deze driehoek een Π -grootheid.
- Neem een aansluitende driehoek. Neem hiervan eveneens een Π -grootheid, plus een hoek om de stand van de aansluitende driehoek ten opzichte van de uitgangsdriehoek vast te leggen. Neem deze drie vormelementen samen in één grootheid, die we *P-grootheid*¹³ noemen, geschreven als

¹³De P-grootheid bevat een vormelement meer dan een Π -grootheid. De letter volgt op de letter Π in het Griekse alfabet is de letter P (hoofdletter rho). Deze letter is identiek met de Latijnse hoofdletter P, die qua klank overeenkomt met Π .

een vector:

$$P_{DBCA} = \begin{pmatrix} \alpha_{DBC} \\ v_{DBC} \\ \alpha_{ABC} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Het toevoegen van een extra punt, bijvoorbeeld punt E in figuur 4.7(b), vraagt één P-grootheid extra om de vorm van het gehele puntenveld vast te leggen. Een puntenveld van n punten wordt aldus vastgelegd met één Π -grootheid en $(n - 3)$ P-grootheden.

Zoals de Π -grootheid de fundamentele vormgrootheid in de tweedimensionale Euclidische ruimte is, is de P-grootheid dat voor de driedimensionale Euclidische ruimte.

Als meer metingen worden uitgevoerd dan nodig zijn om alle benodigde vormelementen te bepalen, is vereffening en daarmee ook toetsing en kwaliteitsbeschrijving van de metingen mogelijk.

Deformatieanalyse gaat over het analyseren van *veranderingen* in de genoemde vormelementen (al dan niet gebundeld in vormgrootheden).

4.3.1.3 Tweedimensionale, gekromde ruimte

Een tweedimensionale ruimte hoeft niet Euclidisch te zijn en kan gekromd zijn. Geodetisch belangrijke voorbeelden zijn het aardoppervlak en diens benadering door een omwentelingsellipsoïde of een bol. De bepaling van de vervorming van een deel van een dergelijk oppervlak is interessant als deformatieanalyseprobleem. Het vervormende deel van het oppervlak kan gemodelleerd worden met bijvoorbeeld een Delaunaytriangulatie. Dit probleem wordt in deze rapportage niet verder uitgewerkt.

4.3.2 Eindige-elementenmethode

4.3.2.1 Vormgrootheden en eindige elementen

In de voorgaande paragrafen is getoond wat in een tweedimensionale vlakke Euclidische ruimte of in een driedimensionale, de elementaire vormen zijn, waarvan de vorm kan worden vastgelegd. Het is nu voor de hand liggend om objecten, die men in de werkelijkheid tegenkomt en waarvan men de deformatie wil bepalen, te beschrijven door middel van verscheidene, zo nodig heel veel elementaire vormgrootheden. Dit is precies wat gedaan wordt in de eindige-elementenmethode. Die methode vindt uitgebreide toepassing bij de dynamische analyse van constructies en bouwwerken. De constructie of het bouwwerk wordt met knooppunten en eindige elementen gediscrètiseerd. Per element en per knooppunt worden belastingen en krachten bepaald en in wiskundige vergelijkingen uitgeschreven. Door voorwaarden te formuleren voor de verbindingen tussen de elementen worden zij samengesmeed in een gezamenlijk complex krachten spel, waaruit de vervormingen per knooppunt berekend kunnen worden. Hier lijkt een natuurlijke manier voorhanden om de voorspelling van deformaties door middel van de eindige-elementenmethode te toetsen aan de geodetisch gemeten vervormingen van diezelfde elementen. De knooppunten en de eindige elementen van de eindige-elementenmethode zijn daarbij de punten en de vormgrootheden van de geodetische deformatieanalyse. De kracht van een dergelijke aanpak is, dat de juistheid van het geodetische vereffeningsmodel veel scherper kan worden getoetst als vanuit de eindige-elementenmethode bekend is, welke deformaties kunnen worden verwacht. Het is dan mogelijk om deformaties statistisch significant aan te tonen, die bij een puntsgewijze toetsing op deformaties “onzichtbaar” blijven in de meetruis.

Het schatten van de vervormingen in de eindige elementen kan in een kleinste-kwadratenvereffening van het geodetische model plaatsvinden (Welsch, 1983). De vervorming van elk elementair element is de *rek* (Engels: *strain*, meestal aangeduid met ϵ) in de terminologie van de eindige-elementenmethode. Uit de rek kan de *spanning* (Engels: *stress*, meestal aangeduid met σ) in elk eindig element worden berekend.

4.3.2.2 Geodetische modellen en a-priori-informatie

De discussie wordt wel gevoerd, of het niet zo zou moeten zijn, dat het opstellen van geodetische modellen en het uitvoeren van metingen daarvoor enerzijds en het opstellen van geofysische, geotechnische,

constructieve en dergelijke modellen en het uitvoeren van metingen daarvoor anderzijds zou moeten plaatsvinden los van elkaar om ze pas aan het eind met elkaar te confronteren. Dat zou objectiever zijn. De informatie uit de geofysica, geotechniek en dergelijke wordt in dat geval de *a-priori-informatie* genoemd. Dit is een niet aan te bevelen werkwijze. Om een beeldspraak te gebruiken: het vinden van een speld in een hooiberg wordt aanzienlijk makkelijker als iemand indicaties geeft waar de speld zich ongeveer bevindt; en heeft men de speld eenmaal gevonden, dan is het echt wel zeker dat het de speld is en niet een strohalm. De *hooiberg* zijn de waarnemingen, die beïnvloed zijn door meetruis (stochastische ruis veroorzaakt door het meetinstrumentarium), puntruis (stochastische ruis veroorzaakt door de idealisatie van een puntvormig object in de werkelijkheid naar een punt in het wiskundig model) en systeemruis (stochastische ruis veroorzaakt doordat het wiskundig model niet goed genoeg de waargenomen werkelijkheid beschrijft). De *speld* is het juiste deformatiepatroon. Het makkelijker maken van het vinden van de speld is het geven van indicaties welke deformatiepatronen verwacht mogen worden.

Het vinden van het juiste deformatiepatroon is een iteratief proces, waarbij afwisselend de geofysica, geotechniek, enz. het model, dat het deformatiepatroon beschrijft, verbetert; en de geodesie het model, dat het deformatiepatroon toetst met geodetische waarnemingen, verbetert.

4.3.3 Analyse en normering met vormgrootheden

4.3.3.1 Vereffningsmodel

Een deformatieanalyse probeert de veranderingen in vormgrootheden te analyseren om daaruit conclusies te trekken over de grootte en eventueel de snelheid van deformaties. Bij een stabiliteitsanalyse wordt gevraagd een uitspraak te doen of er al dan niet een deformatie plaatsvindt.

De veranderingen in vormgrootheden worden bepaald door *metingen* uit te voeren. De metingen leveren waarnemingen op. De waarnemingen zijn stochastische grootheden, omdat zij onvermijdelijk beïnvloed zijn door allerlei stoorinvloeden, de meetruis, waardoor zij afwijken van de verwachtingswaarde in het aangenomen wiskundige model. De metingen kunnen uitgevoerd worden door meetinstrumenten (total stations, waterpasinstrumenten, laserafstandmeters, interferometrische sensoren voor radarsignalen, scanapparaten, fotogrammetrische uitwerkingsoftware, enzovoorts) of met het blote oog (lijnen lopen evenwijdig, een punt ligt in het verlengde van een muur, enzovoorts). Veelal kan worden aangenomen, dat de meetruis van de waarneming beschreven kan worden met een normale verdeling (verdeling van Gauss-Laplace).

Het uitgangsmateriaal voor de deformatieanalyse zijn de waarnemingen, samen met informatie over het stochastische karakter van de waarnemingen, in het algemeen beschreven door de covariantiematrix van de waarnemingen. Voor de analyse wordt een model opgesteld, dat de relaties tussen de waarnemingen en de veranderingen in de vormgrootheden beschrijft. In het algemeen voldoen de waarnemingen niet aan het model. De oorzaak is de meetruis, eventuele fouten in het waarnemingsmateriaal en eventuele fouten in het model.

Door de waarnemingen te vereffenen op zodanige wijze, dat zij gaan voldoen aan het model, worden de waarnemingen verbeterd. Bovendien levert de vereffening informatie om de waarnemingen te kunnen toetsen, mits er meer waarnemingen zijn uitgevoerd dan strikt nodig om het model te beschrijven.

Na vereffening is bekend welke getalswaarden aan de veranderingen van de vormgrootheden gekoppeld kunnen worden. Belangrijk is, dat naast de getalswaarden ook informatie beschikbaar komt over het stochastische karakter van de berekende veranderingen van de vormgrootheden.

Een veel gebruikte methode voor het vereffenen van waarnemingen is de methode van de kleinste kwadraten. Deze methode heeft een aantal belangrijke optimaliteitseigenschappen (Teunissen, 2000). Deze methode levert voor alle berekende grootheden eveneens de covariantiematrices. De methode kent twee benaderingswijzen voor het vereffenen: het vereffenen van voorwaardevergelijkingen¹⁴ en het vereffenen van waarnemingsvergelijkingen¹⁵. Beide benaderingswijzen leveren gelijke resultaten.

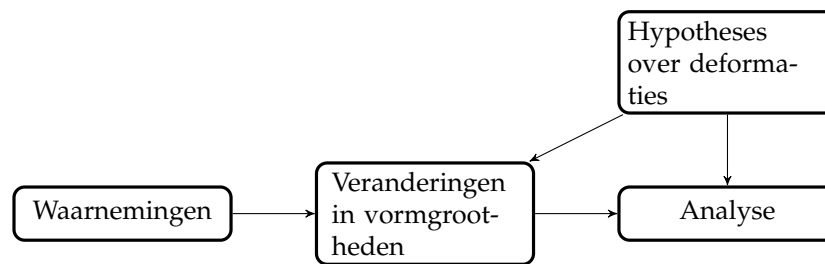
Het model met waarnemingsvergelijkingen kent naast de waarnemingen ook parameters, die het model beschrijven. De vereffening levert behalve de vereffende waarnemingen ook schattingen op van

¹⁴eerste standaardvraagstuk volgens Tienstra (1956), B-model volgens Teunissen (2000)

¹⁵tweede standaardvraagstuk volgens Tienstra (1956), A-model volgens Teunissen (2000)

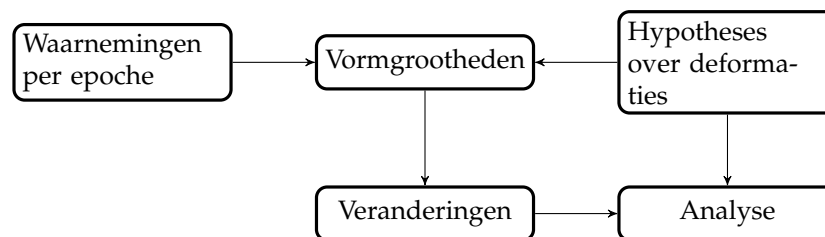
de parameters. De veranderingen in vormgrootheden kunnen als parameters ingevoerd worden. Vervolgens kunnen hypothesen over mogelijke deformaties worden opgesteld, die in de context van het vereffeningsmodel kunnen worden getoetst. Deze hypothesen kunnen ook nodig zijn om de veranderingen in de vormgrootheden te bepalen. Een voorbeeld is het vereffenen van een waterpasnetwerk, waarvoor verondersteld wordt, dat gedurende de metingen, die langere tijd kunnen duren, geen deformaties plaatsvinden. Een ander voorbeeld is de satellietradarinterferometrie, waarvoor informatie over de deformatie nodig is om de waarnemingen te kunnen interpreteren.

De relatie tussen waarnemingen, veranderingen in vormgrootheden en de analyse aan de hand van hypothesen is in figuur 4.8 weergegeven.



Figuur 4.8: Waarnemingen, vormgrootheden en analyse

Sommige meettechnieken kunnen alleen veranderingen in de vormgrootheden meten en niet de vormgrootheden zelf. Of ze meten de veranderingen veel beter. Dit geldt bijvoorbeeld voor satellietradarinterferometrie. Bij veel deformatiemetingen echter worden de veranderingen in de vormgrootheden bepaald door eerst de vormgrootheden te bepalen en daarna de veranderingen daarin te berekenen. Dit is in figuur 4.9 weergegeven.



Figuur 4.9: Waarnemingen per epoche, vormgrootheden en analyse

4.3.3.2 Principal property

Bij het toepassen van procedures als in de figuren 4.8 en 4.9 weergegeven, speelt de “principal property” van prof. Tienstra een belangrijke rol. Tienstra (1956, blz. 154) formuleerde de “principal property” van vereffeningsproblemen, die met de methode van de kleinste kwadraten worden opgelost, als volgt:

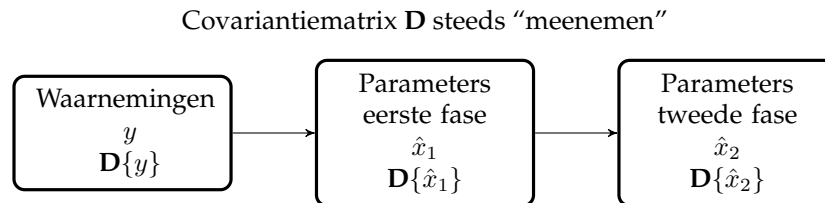
Every problem of adjustment may be divided into an arbitrary number of phases, provided that in each following phase the cofactors resulting from preceding phase(s) are used.

Met de *cofactors* worden de cofactoren (ook gewichtscoefficienten genoemd) bedoeld, die op een willekeurig te kiezen factor na, gelijk zijn aan de covarianties, zoals die in de covariantiematrix zijn opgenomen.

Vertaald naar het schema in figuur 4.9, betekent de *principal property*, dat we drie fasen onderscheiden in het schema:

1. het berekenen van vormgrootheden uit waarnemingen;
2. het berekenen van veranderingen uit vormgrootheden;
3. het analyseren van de veranderingen door hypothesen te toetsen.

Voor elk van deze fasen wordt van een vereffeningsmodel gebruik gemaakt. Als in een fase gebruik wordt gemaakt van resultaten uit een voorgaande fase, moet de covariantiematrix van die resultaten worden gebruikt, zie figuur 4.10.



Figuur 4.10: Tienstra's *principal property*

Het kan zijn, dat men besluit om niet de volledige covariantiematrix, volgend uit de vorige fase, te gebruiken, bijvoorbeeld omdat die niet is berekend of niet is bewaard. In dat geval gebruikt men meestal ofwel een eenheidsmatrix (men veronderstelt alle parameters van gelijke precisie en ongecorrleerd), ofwel een diagonaalmatrix (men heeft wel standaardafwijkingen van alle parameters, maar veronderstelt dat er geen correlatie is). Het kan ook zijn, dat men een *vervangingsmatrix* opstelt, die wel met verschillende standaardafwijkingen en met correlatie rekening kan houden, maar waarvoor een eenvoudig model met een beperkt aantal parameters wordt gehanteerd. De eenheidsmatrix of diagonaalmatrix kunnen gezien worden als speciale gevallen van een vervangingsmatrix.

Het gebruik van een vervangingsmatrix is alleen verantwoord, als men de consequenties daarvan kent en men weet welke afwijkingen men daardoor in de conclusies van de deformatieanalyse kan verwachten.

4.3.3.3 Normering

Het stellen van normen kan plaatsvinden voor de precisie van vormgrootheden. Het probleem is, dat voor een puntenveld vele vormgrootheden kunnen worden berekend. Zelfs als slechts het minimale aantal vormgrootheden wordt berekend, blijft de vraag welke vormgrootheden moeten worden gekozen.

Voor deformatieanalyseproblemen is het soms mogelijk om aan te geven, welke deformaties verwacht kunnen worden. In dat geval is het aan te bevelen normen te stellen voor die vormgrootheden die het meest door de te verwachten deformaties zullen veranderen.

In plaats van met vormgrootheden te werken kan de analyse worden uitgevoerd met gebruikmaking van coördinaten. De voordelen hiervan en de werkwijze zullen in paragraaf 4.4 aan de orde komen.

In het vervolg daarop zal eveneens aan de orde komen hoe begrippen die vergelijkbaar zijn met de grenswaarde-ellips(oïd)en van paragraaf 4.2.3.1, kunnen worden gebruikt voor het stellen van normen.

4.3.4 Absoluut en relatief

4.3.4.1 Definitie van absolute en relatieve deformatie

Veronderstel, dat men geïnteresseerd is in een object waarvan men vermoedt dat het deformeert of waarvan men juist wil vaststellen, dat het niet deformeert. Noem dit object het deformerende object.

Onder een *absolute* deformatieanalyse wordt verstaan het analyseren van de verandering van het deformerende object ten opzichte van één of meer andere objecten, die verondersteld worden niet beïnvloed te zijn door de krachten, die het deformerende object beïnvloeden of kunnen beïnvloeden.

Onder een *relatieve* deformatieanalyse wordt verstaan het analyseren van de vorm- en grootteverandering van het deformerende object los van diens omgeving.

De absolute deformatieanalyse kan worden gezien als een bijzonder geval van de relatieve deformatieanalyse, als het puntenveld, dat het deformerende object representeert en het puntenveld, dat de niet-deformerende objecten representeert, worden samengevoegd tot één puntenveld. In het vervolg zal daarom niet meer een onderscheid tussen absoluut en relatief worden gemaakt. Bij de deformatieanalyse wordt wel getoetst, wat de stabiele, minder stabiele en niet-stabiele delen van het puntenveld zijn. Dat gebeurt door het opstellen van toetsingsmodellen, waarin het puntenveld verdeeld wordt in verschillende deelpuntenvelden, die ieder een ander deformatiepatroon kan vertonen. “Stabiel zijn” is een mogelijk deformatiepatroon.

Absolute deformatieanalyse is een speciaal geval van een relatieve deformatieanalyse en moet als zodanig worden behandeld

4.3.4.2 Referentie- en objectpunten

Een splitsing van het puntenveld in *referentiepunten* en *objectpunten* is zinvol om te verwachten of geconstateerde deformatiepatronen mee aan te duiden. De splitsing moet echter niet gedaan worden om de analyse voor beide typen punten afzonderlijk uit te voeren. Het eerst toetsen van referentiepunten op stabiliteit en die punten in een vervolganalyse als foutloos aannemen, is een methode, die, hoewel wijdverspreid, niet wordt aangeraden. Een betere methode is het opstellen van toetsingsmodellen, waarbij de referentiepunten als stabiel worden aangenomen (maar wel met een (geschrante) covariantiematrix) en de objectpunten als deformerend. De zoektocht is vervolgens naar het model, dat het beste de waarnemingen recht doet. Daarbij kunnen referentiepunten alsnog als niet-stabiel worden aangenomen en eventueel objectpunten als stabiel. Het kan ook nodig zijn het puntenveld in meer dan twee deelpuntenvelden onder te verdelen. Het splitsen van het analyseproces in een analyse van de referentiepunten en een analyse van de objectpunten, waarbij de referentiepunten foutloos worden verondersteld, betekent, dat met de stochasticiteit van de referentiepunten geen rekening wordt gehouden, waardoor die naar de objectpunten wordt “geduwd” en aldus de analyse van de objectpunten vertroebelt.

4.3.4.3 Theoretische en operationele definitie van het referentiestelsel

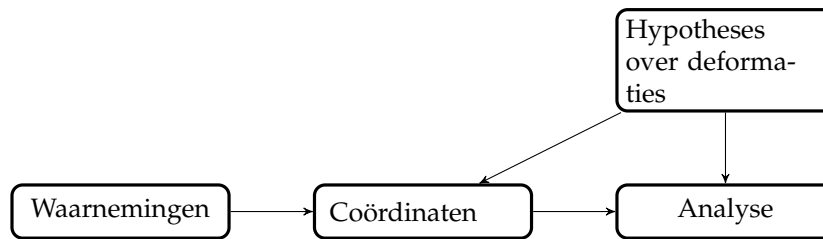
In paragraaf 4.3 is getoond, dat onderscheid moet worden gemaakt tussen de theoretische definitie van een coördinatenstelsel (de oorsprong is het massacentrum van de aarde, de z-as valt samen met de omwentelingsas van de aarde, enzovoorts) en de operationele definitie ervan (bijv.: AGRS-punten bepalen de ligging van het assenstelsel en via aansluitingspunten wordt de meting aan de AGRS-definitie vastgelegd). Het verschil tussen een absolute en relatieve deformatieanalyse heeft niets te maken met dit verschil tussen een theoretisch en een operationeel gedefinieerd assenstelsel. Het geven van coördinaten in een landelijk referentiestelsel zegt niets over de vraag of het een absolute of relatieve deformatieanalyse betreft.

4.4 Vorm en grootte beschrijven met coördinaten

In 1637 publiceerde de Franse filosoof en wiskundige René Descartes (Latijnse vorm: Renatus Cartesius) in Leiden zijn *Discours de la Méthode* met de daarbij behorende bijlage *La Géométrie*. Hij toonde in dit werk aan dat geometrische problemen omgezet kunnen worden in algebraïsche problemen, onder meer door toepassing van rechthoekige coördinaten, naar hem *cartesiaanse* of *cartesische* coördinaten genoemd.

Het gebruik van coördinaten is sinds de publicatie door Descartes zeer populair geworden, zeker ook in de geodesie. Zelfs zodanig, dat men vaak de coördinaten als het doel van metingen ziet, in plaats van als middel om geometrische vragen op te lossen.

In de voorgaande paragrafen is betoogd, dat de deformatieanalyse zich bezighoudt met het bestuderen van de veranderingen in vormgrootheden. Het moet mogelijk zijn de precisie van deze veranderingen te bepalen en op basis daarvan een toetsmethode af te leiden. Vervolgens moet het mogelijk zijn grootheden af te leiden, die informatie geven over de deformaties, die met de toetsmethodiek opspoorbaar zijn: de grenswaarden van de opspoorbare deformaties. Echter, in navolging van Descartes wordt die weg niet bewandeld, maar wordt het geometrische probleem van de deformatieanalyse aangepakt door het te formuleren met behulp van cartesiaanse coördinaten (figuur 4.11).



Figuur 4.11: Waarnemingen, coördinaten en analyse

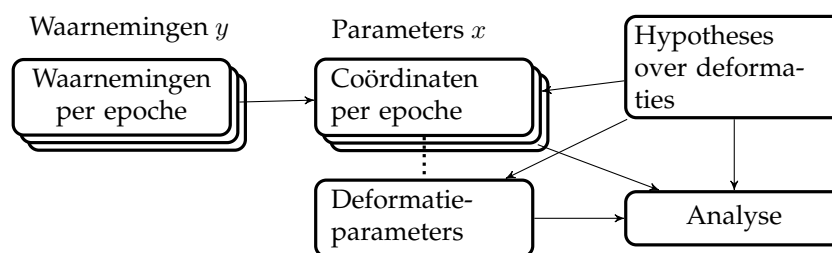
Het vastleggen van de vorm en grootte van een puntenveld met cartesische coördinaten (of andere coördinaten, zoals geografische) heeft voordelen. Er hoeft niet een ruimtelijke figuur van het puntenveld te worden gemaakt, zoals een triangulatie of een polyeder. De coördinaten worden rechtstreeks aan de aangemeten punten gekoppeld. Nadelen kleven ook aan de methode. Coördinaten leggen meer vast dan alleen de vorm en grootte. Die extra informatie betreft de ligging en oriëntering van het assenstelsel (of van assenstelsel en referentie-ellipsoïde als het om geografische coördinaten gaat). Dit compliceert de precisiebeschrijving en daarmee de toetsing en kwaliteitsbeschrijving. In de komende paragrafen wordt het probleem van de deformatieanalyse behandeld door gebruik te maken van coördinaten en de daardoor veroorzaakte problemen en hun oplossingen zullen worden getoond. Daarbij blijft steeds het uitgangspunt, dat deformatieanalyse gaat over het analyseren van de veranderingen van vormgrootheden (inclusief een analyse van de verandering van de grootte). De toetsing en kwaliteitsbeschrijving moet alleen afhankelijk zijn van vormverandering en eventueel grootteverandering en invariant voor wijziging van andere informatie, zoals de ligging en oriëntering van het assenstelsel.

4.4.1 Deformatieanalyse in één of twee Tienstrafasen

Voor de analyse van vorm- en grootteveranderingen worden in de komende paragrafen twee methoden behandeld.

4.4.1.1 Eerste methode

Bij de eerste methode worden de waarnemingen van alle epochen samengenomen en worden daaruit met de kleinste-kwadratenmethode coördinaten berekend, zie figuur 4.12.



Figuur 4.12: Deformatieanalyse met coördinaten

In eerste instantie wordt verondersteld, dat elk punt in elke epoeche andere coördinaten heeft. Wel zijn die coördinaten gedefinieerd ten opzichte van hetzelfde referentiestelsel en dezelfde S-basis. Vervolgens worden in het model restricties geformuleerd, die het verband tussen de coördinaten van een punt in verschillende epochen vastleggen. Als het punt verondersteld wordt niet te bewegen tussen twee epochen, zijn er in 3D drie restricties: de x -, y - en z -coördinaat van het punt zijn in beide epochen gelijk. Als men vermoedt, dat een deformatie heeft plaatsgevonden, wordt dit door restricties vastgelegd. Als bijvoorbeeld een punt lineair in de tijd verschuift, kunnen we schrijven:

$$x_2 = x_1 + x_{12} = x_1 + v_x t_{12}, \quad (4.39)$$

$$x_3 = x_2 + x_{23} = x_2 + v_x t_{23}. \quad (4.40)$$

- x_1, x_2, x_3 , zijn de x -coördinaten van het punt in de epochen t_1, t_2 en t_3 .
- $x_{12} = x_2 - x_1$ en $x_{23} = x_3 - x_2$: de coördinaatverschillen.
- $t_{12} = t_2 - t_1$ en $t_{23} = t_3 - t_2$: de epocheïntervallen.
- v_x is de constante snelheid, waarmee het punt in de x -richting beweegt.

Analoge formules gelden voor de y - en z -coördinaat van het punt.

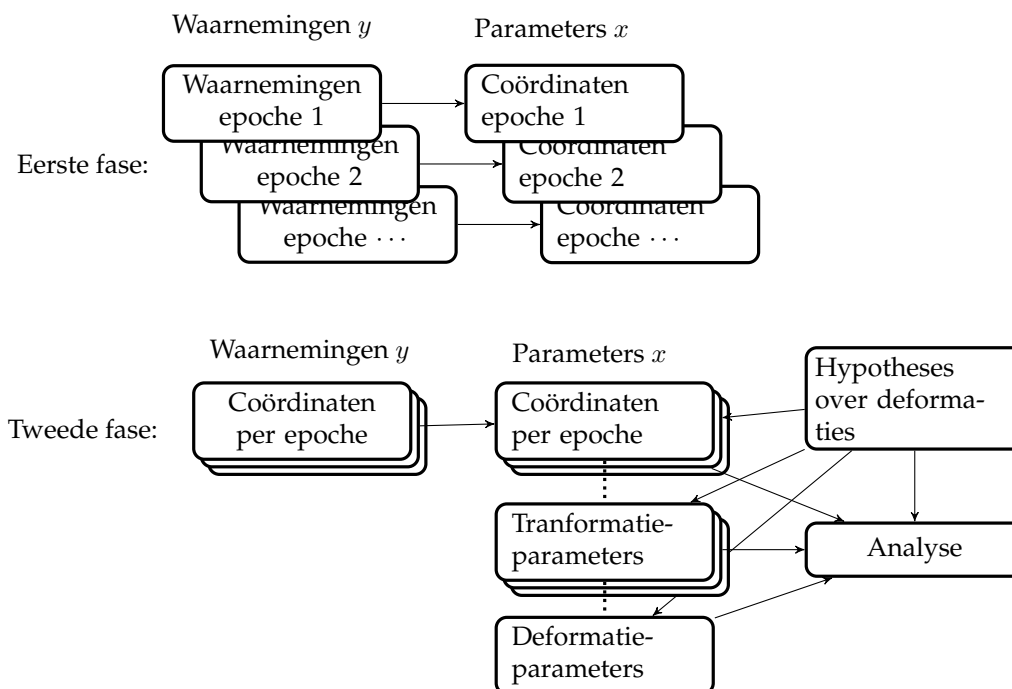
De constante snelheden v_x, v_y en v_z worden toegevoegd als onbekende parameters aan de parameter-vector en in de kleinste-kwadratenvereffening opgelost. Zij zijn een voorbeeld van de “deformatieparameters” in figuur 4.12. Als de algemene toets van het model niet tot verwerping van de nulhypothese leidt, is bevestigd (maar niet bewezen!), dat het punt lineair in de tijd beweegt.

Vaak is niet-bewegen (of lichtelijk fluctueren rond een vaste positie) het normale gedrag van een object. Dat het punt beweegt is een vermoeden, dat moet worden getoetst. Dat kan door het niet-bewegen als nulhypothese te nemen en het bewegen als alternatieve hypothese. Het toetsen van de alternatieve hypothese tegenover de nulhypothese kan uitsluitel geven over het aanwezig zijn van de deformatie.

De eerste methode wordt behandeld in paragraaf 4.5. In het kader van het project DefoGuide is deze methode grondig geanalyseerd, wat heeft geresulteerd in een wetenschappelijk artikel (Velsink, 2016a). Voor meer details dan wat in paragraaf 4.5 wordt beschreven, wordt daarom verwezen naar dat artikel.

4.4.1.2 Tweede methode: splitsing in twee Tienstrafasen

Bij de tweede methode wordt het proces in twee fasen geknipt. In de eerste fase worden de waarnemingen per epoche vereffend en coördinaten berekend. In de tweede fase worden de coördinaten van alle epochen samengevoegd en opnieuw vereffend. Op basis van de laatste vereffening wordt een deformatieanalyse uitgevoerd, zie figuur 4.13.



Figuur 4.13: Analyse van coördinaten in twee Tienstrafasen

Als het proces op deze wijze in twee fasen wordt gesplitst, moet de *principal property* van prof. Tienstra worden toegepast. Het is beschreven op bladzijde 52. Daarom worden de fasen hier als “Tienstrafasen” aangeduid. In de eerste fase worden coördinaten berekend en ook hun *covariantiematrices*. Zij zijn het uitgangsmateriaal voor de tweede fase.

In de tweede fase worden in elk epocheïnterval een set transformatieparameters in de parametervector opgenomen. Het betreft een gelijkvormigheids- of een congruentietransformatie. Dat wordt gedaan, omdat alleen de informatie over vorm en grootte moet worden getoetst. De transformaties kunnen alleen

achterwege worden gelaten, als zeker is dat de coördinaten van alle epochen ten opzichte van dezelfde S-basis zijn gedefinieerd. Maar zelfs dan heeft het voordelen om wél een transformatie op te nemen, omdat het toetsen op deformatie van de punten, die de S-basis vormen, dan geen extra handelingen vereisen.

De tweede methode wordt behandeld in paragraaf 4.6.

4.4.1.3 Eerste of tweede methode?

De *eerste methode* is de logische aanpak als een softwarepakket zoals MOVE3 wordt gebruikt voor de deformatieanalyse. De waarnemingen van alle epochen worden in één MOVE3-project samengenomen en vereffend. Vanaf versie 4.2.0 van MOVE3 is het mogelijk om tussen punten van verschillende epochen *verschuivingsvectoren* in te voeren. Door als waarden voor de x -, y - en z -component van de verschuivingsvector nul in te voeren, wordt “geen deformatie” als nulhypothese ingevoerd. Hiermee kan een stabiliteitsanalyse worden uitgevoerd. Bij verwerping van de nulhypothese kan via w - en T -toetsen gezocht worden naar de punten, die zijn gedeformeerd. Hiermee is een krachtig hulpmiddel voorhanden om deformatieanalyses uit te voeren.

Het formuleren en toetsen van deformaties die meer dan één punt omvatten, is met de huidige versie 4.3.0 niet mogelijk. Ook het formuleren van hypothesen met deformatieparameters (bijvoorbeeld de snelheid van een lineaire deformatie, of de frequentie en amplitude van een periodieke deformatie) is niet mogelijk.

De *tweede methode* is de logische aanpak, als de coördinaten uit verschillende bronnen komen, of als het aantal coördinaten ten opzichte van het aantal waarnemingen veel kleiner is. In de huidige praktijk wordt deze methode toegepast, met twee belangrijke kanttekeningen:

- Prof. Tienstra's *principal property* wordt vrijwel nooit toegepast: de covariantiematrices worden in de eerste fase niet opgeslagen en niet in de tweede fase gebruikt. Hoogstens worden de standaardafwijkingen naar de tweede fase meegenomen (maar is dat veel beter dan alle punten een gelijke precisie geven? De voorgaande paragrafen hebben duidelijk gemaakt, dat het verwaarlozen van correlatie en het niet schranken tot geheel verkeerde conclusies kan leiden).
- De tweede fase wordt vrijwel nooit als kleinste-kwadratenvereffening en -toetsing uitgevoerd, zie paragraaf 4.4.2. De kwaliteit van de analyse is in dat geval minder dan als de eerste methode wordt toegepast.

Als wel de covariantiematrices naar de tweede fase worden meegenomen, wordt een probleem daarvan duidelijk: als er n coördinaten zijn, moeten voor de covariantiematrix $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ elementen worden opgeslagen. Een goede benadering voor een covariantiematrix, die met minder parameters kan worden beschreven, is de auteur niet bekend.

De tweede methode biedt de mogelijkheid te onderzoeken, welke fout men maakt, als men de covariantiematrix niet gebruikt. Beter geformuleerd: in plaats van de covariantiematrix uit de eerste fase, gebruikt men de eenheidsmatrix. Systematisch onderzoek naar de gevolgen hiervan moet nog plaatsvinden.

De tweede methode is door de auteur in MATLAB geprogrammeerd. Het toetsen van het lineair zakken van één of meer punten gedurende meer epochen is in het programma mogelijk. De eerste resultaten hiermee zijn veelbelovend. Complexere hypothesen kunnen nog niet worden getoetst.

4.4.1.4 Niet-stochastische waarnemingen

Het toetsen van deformaties wordt uitgevoerd door in het vereffeningsmodel de geodetische metingen van alle epochen als “losse” geodetische netwerken te zien – één netwerk voor elke epoche – en vervolgens deze netwerken aan elkaar te koppelen door *restricties* te formuleren. De restricties leggen bijvoorbeeld vast, dat dezelfde punten in alle epochen onveranderd zijn gebleven. Of dat een deel van de punten een lineaire beweging in de tijd heeft ondergaan. Of een ander deformatiepatroon heeft ondergaan.

Bij het onderzoek naar het op deze wijze formuleren van deformatiepatronen kwam de auteur met het idee deze restricties in het vereffeningsmodel op te nemen als waarnemingen met een standaardafwijking nul. Het voordeel daarvan is, dat het toetsen van deformaties op dezelfde wijze kan plaatsvinden als het toetsen van waarnemingen, die met instrumenten zijn gemeten. Het is zelfs mogelijk om in één toets zowel te toetsen of er fouten in de gemeten waarnemingen zitten en of er deformaties hebben plaatsgevonden. Vooropgesteld natuurlijk, dat er voldoende overtallige waarnemingen zijn om een voldoende scherpe toets te krijgen.

Het is ook mogelijk om grenswaarden te berekenen voor niet-stochastische waarnemingen. Daarmee kan worden aangegeven welke fouten (deformaties) in de niet-stochastische waarnemingen met een gespecificeerde (referentie)kans (meestal 80% gekozen) kunnen worden opgespoord met de toets van die deformaties.

Bij het uitwerken van het formuleren van deformaties als niet-stochastische waarnemingen, moest een aantal hobbels worden genomen:

1. Hoe kan een model van waarnemingsvergelijkingen (tweede-standaardvraagstuk, A-model) worden vereffend als de covariantiematrix rijen en kolommen bevat die uit louter nullen bestaan? De covariantiematrix is dan niet inverteerbaar (de matrix is *singulier*) en de gewichtsmatrix is niet te bepalen door inversie van de covariantiematrix. De oplossing is in de wetenschappelijke literatuur bekend, maar wordt weinig toegepast. Niet bekend was de vraag hoe toetsing van het model, en vooral van de niet-stochastische waarnemingen, kan plaatsvinden. In een wetenschappelijk artikel heeft de auteur *vijf methoden* beschreven om zowel de vereffening als de toetsing uit te voeren ([Velsink, 2016b](#)).
2. Heeft de oplossing die berekend wordt met een singuliere covariantiematrix nog steeds de eigenschap dat de gewogen kwadratische som van de correcties aan de waarnemingen geminimaliseerd wordt (ofwel: is het een kleinste-kwadratenoplossing)? Dit is in een artikel van [Velsink \(2016b\)](#) bevestigend beantwoord.
3. Is een vereffeningsmodel met niet-stochastische waarnemingen toepasbaar voor deformatieanalyse? Dit is in een artikel van [Velsink \(2016a\)](#) bevestigend beantwoord.
4. Kunnen de 3D-coördinaten van meer dan twee epochen via gelijkvormigheids- of congruentietransformaties (gvt's of cgt's) aan elkaar worden gekoppeld, waarbij de transformatieparameters in het vereffeningsmodel worden opgelost? Kan daarbij een gvt of een cgt als een affiene transformatie worden behandeld, die voldoet aan restricties, waardoor de affiene transformatie een gvt of cgt wordt? De restricties worden als niet-stochastische waarnemingen in het model opgenomen.
De auteur heeft om dit te onderzoeken een dergelijk model succesvol in MATLAB geprogrammeerd en een wetenschappelijk artikel erover geschreven ([Velsink, 2016c](#)).
5. Is de toetsing en de kwaliteitsbeschrijving (met behulp van grenswaarden) invariant voor een wijziging van de schrankingsbasis? Dit is in de genoemde artikelen bevestigend beantwoord.

De drie genoemde wetenschappelijke artikelen zijn in het kader van het project DefoGuide geschreven en als "open access" gepubliceerd. Dat betekent, dat ze van het internet afgehaald kunnen worden zonder voor copyright of gebruik te hoeven betalen.

4.4.2 Samenvoegen van epochen

Bij het uitvoeren van deformatieanalyses met bijvoorbeeld tachymetermetingen worden objecten in meer dan één epoche gemeten. Van elke epoche worden de metingen vereffend. Dat resulteert in een vorm- en groottebeschrijving van de objecten in die epoche. De analyse of en welke deformaties hebben plaatsgevonden, wordt uitgevoerd door de resultaten van de epochen met elkaar te vergelijken.

Analyse met spreadsheet In de huidige praktijk¹⁶ bestaat de analyse vaak uit het plaatsen van de vereffende hoogtes of x -, y - en z -coördinaten in een spreadsheet, waarna de verschillen tussen de epochen in de spreadsheet worden berekend. Eventueel worden grafieken van de verschillen gemaakt: op

¹⁶Met de "huidige praktijk" wordt de praktijk bedoeld, zoals die bekend is aan de auteur op het moment van schrijven, februari 2015.

de x -as staan de epochen en op de y -as het verschil in hoogte, in x -coördinaat, in y -coördinaat of in z -coördinaat. Een verbale toelichting op deze tijdreeksen sluit de analyse af. Een meerdimensionale analyse is hiermee moeizaam uit te voeren, omdat de presentatie van de verschillen slechts voor steeds twee epochen, voor slechts één punt en voor slechts één dimensie plaatsvindt.

Als voorbeeld van de wijze, waarop in de huidige praktijk de eisen aan geodetische deformatiemetingen worden geformuleerd kunnen de *Productspecificaties Deformaties Kunstwerken* van Rijkswaterstaat (Rijkswaterstaat, 2014) dienen. Deze productspecificaties worden niet alleen door Rijkswaterstaat zelf gebruikt bij uitbesteding van werken, maar ook door veel andere partijen. Hier worden enkele voorbeelden gegeven:

- Uitbesteding van deformatiemetingen door het Havenbedrijf Rotterdam. Tender ICM-1011497 van het havenbedrijf, geplaatst op www.tendernet.nl, gepubliceerd op 5 augustus 2013, bevat het document “NVI 2 – BIJLAGE 1 – AANGEPASTE ANNEX 1”, waarin staat: “Zie voor nauwkeurigheidseisen van alle objecten het document “productspecificaties Deformatiemeting Kunstwerken” versie 1 maart 2012, van Rijkswaterstaat (ministerie van I&M)”.
- Monitoringsplan omleiding N325, opgesteld door Fugro GeoServices B.V. ten behoeve van de Combinatie I-Lent, die werkzaam is voor de gemeente Nijmegen. In paragraaf 4.2 van het plan staat: “Voor het opzetten van voorliggend monitoringsplan voor de deformatiemetingen van de brug en tunnel is zoveel mogelijk uitgegaan van de Productspecificaties Deformatiemetingen Kunstwerken van Rijkswaterstaat, d.d. 1 maart 2012.”.

Het monitoringsplan is te vinden op bekendmakingen.nijmegen.nl.

- Afstudeeronderzoek van Ivar Schols bij de TU Delft voor TNO: “Segmentvoegcapaciteit van de Kiltunnel, Deel 1: Afgezonden tunnels en zettingen”. In paragraaf 3.3.4 staat: “Informatie, richtlijnen en eisen omtrent de vervormingsmetingen zijn te vinden in het door Rijkswaterstaat gehanteerde document “Productspecificatie Deformatiemeting Kunstwerken”.”. De eisen uit het document worden overgenomen en niet ter discussie gesteld.

Het rapport is te vinden op repository.tudelft.nl.

De *Productspecificaties Deformaties Kunstwerken* spelen aldus in de huidige praktijk een belangrijke rol in het formuleren van eisen, waaraan geodetische deformatiemetingen in Nederland moeten voldoen.

In de *Productspecificaties* wordt ervan uitgegaan, dat vier typen metingen in elke epoeche worden uitgevoerd:

1. Z-metingen (meting van de hoogte);
2. XY-metingen (bepaling van x - en y -coördinaten in het horizontale vlak);
3. voegmetingen;
4. scheefstandsmetingen.

Voor de Z-metingen en XY-metingen worden de eisen in respectievelijk bijlage C en D van Rijkswaterstaat (2014) uitgewerkt. Daaruit blijkt dat ervan wordt uitgegaan, dat de metingen per epoeche worden vereffend. De methode van de kleinste kwadraten wordt niet expliciet genoemd, maar het voorschrijven van het netwerkvereffeningspakket MOVE3 (dat met de kleinste-kwadratenmethode werkt) in bijlage C.5, de vermelding van een voorkeur voor MOVE3 in bijlage D.5.1 en het voorschrijven van de B-methode van toetsen (die gebaseerd is op de kleinste-kwadratenmethode (Baarda, 1968a)) maken duidelijk, dat de kleinste-kwadratenmethode wordt voorgeschreven voor het berekenen van de resultaten per epoeche. Voor de vereffening per epoeche worden de te hanteren statistische parameters, zoals onbetrouwbaarheidsdrempel en onderscheidingsvermogen, expliciet voorgeschreven (bijlage C.5.2, C.5.4, D.5.2).

De eisen voor de analyse van het samenvoegen van de epochen zijn echter opmerkelijk kort. In bijlage C.6 en D.7 worden er slechts vier respectievelijk drie alinea's aan gewijd. In zowel bijlage C.6 als D.7 staat: “Aan de Opdrachtgever wordt informatie verstrekt over de aard en omvang van de deformatie en het deformatieverloop.”. Hoe de aard en omvang van de deformatie en het deformatieverloop moeten worden bepaald en getoetst, wordt niet nader gespecificeerd.

Van een kleinste-kwadratenvereffening en een aansluitende statistische toetsing van het samenvoegen van de epochen is derhalve geen sprake.

Analyse met kleinste-kwadratenvereffening In deze notitie wordt ervan uitgegaan, dat de analyse na samenvoeging van de epochen plaatsvindt aan de hand van een kleinste-kwadratenvereffening van de metingen van alle epochen, inclusief een statistische toetsing en een bijbehorende kwaliteitsbeschrijving. In deze paragraaf 4.5 wordt bovendien verondersteld, dat de kleinste-kwadratenvereffening van het samenvoegen van de epochen gelijktijdig plaatsvindt met de kleinste-kwadratenvereffening van de metingen in elke epoeke afzonderlijk.

4.5 Deformatieanalyse met geodetische waarnemingen

4.5.1 Inleiding

In deze paragraaf 4.5 wordt de situatie behandeld, dat geodetische waarnemingen zijn uitgevoerd in de driedimensionale Euclidische ruimte, zoals richtings- en afstandsmetingen met een tachymeter (*total station*). De metingen worden epochegewijs uitgevoerd. Een epoeke is hier een tijdstip of een korte tijdsduur. Het epochegewijs uitvoeren betekent, dat bijvoorbeeld elke week, of elke maand, of eens in de drie jaren, een aantal objectpunten wordt aangemeten gedurende de tijdsperiode die nodig is om alle metingen uit te voeren (bijv. twintig minuten, of een dag, of een week).

Het behandelde in deze paragraaf is uitgewerkt in een wetenschappelijk artikel, dat is ingediend bij een tijdschrift en op het moment van schrijven van deze paragraaf onder *review* is ([Velsink, 2016a](#)).

De metingen van één epoeke worden gebruikt om coördinaten te bepalen van alle objectpunten in een van tevoren gekozen referentiestelsel. Hier wordt verondersteld, dat cartesische x -, y -, z -coördinaten worden bepaald in een lokaal assenstelsel, waarvan de z -as evenwijdig loopt met de lokale richting van de zwaartekracht. Elk ander referentiestelsel kan echter even goed worden gebruikt. Het in Nederland veel gebruikte vereffeningspakket MOVE3, bijvoorbeeld, gebruikt voor de berekeningen geodetische coördinaten (geodetische lengte, breedte en hoogte ten opzichte van een referentie-ellipsoïde).

Het gaat bij deformatieanalyse om het bepalen van de vorm en grootte van objecten. Als de vorm en grootte worden geanalyseerd op basis van slechts twee epochen, spreken we van een *congruentieanalyse* ([Welsch & Heunecke, 2001](#)). Als de analyse gebaseerd is op een reeks van epochen, is er sprake van een *tijdreeksanalyse*. Het doel is het bepalen en toetsen van vorm- en grootteveranderingen gedurende twee, meer of een groot aantal epochen. Het gaat derhalve over een een-, twee- of driedimensionale tijdreeksanalyse.

Vanaf paragraaf 4.5.2 wordt het vereffeningsmodel voor het vereffenen en toetsen van geodetische waarnemingen en het berekenen van de coördinaten gepresenteerd. Niet alle formules die daarvoor nodig zijn worden behandeld. Slechts dat wat specifiek is voor de deformatieanalyse en het opstellen van normen wordt aan de orde gesteld. Voor de overige benodigde formules en theorieën wordt verwezen naar de literatuur, bijvoorbeeld [Teunissen \(2000, 2006\)](#).

Verschillende aspecten van de vereffening komen aan de orde. Eerst wordt ingegaan op het vereffenen van de afzonderlijke epochen en de vereffening van alle epochen tezamen. Dan wordt het algemene vereffeningsmodel gepresenteerd, waarbij de waarnemingen naar vijf typen worden onderscheiden. De schrancking komt als een belangrijk onderdeel van deformatieanalyses aan de orde. Ruimtelijke en temporele inter- en extrapolatie en singulariteit van de covariantiematrix worden behandeld. Hiermee kan het vereffeningsmodel worden opgesteld. Het bepalen van de kleinste-kwadratenoplossing komt dan aan de orde. Verschillende typen deformatiemodellen en hun toetsing worden behandeld. Tenslotte wordt beschreven hoe grenswaarde-ellips(oïd)en en grenswaardehyperellipsoiden worden berekend en hoe die een rol spelen bij het stellen van normen. De paragraaf eindigt met een numeriek voorbeeld.

4.5.2 Vereffeningsmodel

Het vereffeningsmodel van waarnemingsvergelijkingen ziet er in zijn algemene vorm als volgt uit:

$$\underline{y} = \mathbf{A}x + a_0 + \underline{e} \quad (4.41)$$

De $(m \times m)$ -matrix bevat m waarnemingen. De $\underline{y}$ is onderstreept om aan te geven, dat de vector *stochastisch* is: er hoort een kansdichtheidsfunctie bij, vaak een normale verdeling (verdeling van Gauß-Laplace). De matrix $\mathbf{A}$ is de coëfficiëntenmatrix, de n -vector x bevat n parameters, a_0 is een m -vector van constante termen en $\underline{e}$ is de m -vector, die de stochastische ruis geeft van alle waarnemingen.

In het model wordt elke waarneming, elk element van $\underline{y}$, uitgedrukt als een (lineaire) functie van de n parameters in vector x . Niet de gezochte en onbekende parameters x worden uitgedrukt als functies van de waarnemingen, maar andersom. Dit is kenmerkend voor het vereffeningsmodel van waarnemingsvergelijkingen. De bepaling van de parameters, dat wil zeggen de oplossing van het model, vindt plaats door het opstellen van het stelsel van normaalvergelijkingen en het oplossen van dat stelsel. Hiervoor wordt verwezen naar de literatuur, bijvoorbeeld [Teunissen \(2000\)](#).

Het model is *lineair*, wat blijkt uit de matrix $\mathbf{A}$ en de vector a_0 . Veelal zijn modellen niet lineair. In dat geval wordt verondersteld, dat het model wordt *gelineariseerd*. De vector a_0 valt weg en de matrix $\mathbf{A}$ bevat de partiële afgeleiden van de niet lineaire waarnemingsfuncties naar de modelparameters. Zowel $\underline{y}$ als x bevatten in dat geval niet de waarnemingen, respectievelijk de parameters, maar de *toeslagen* op de benaderde waarden van de waarnemingen en de parameters: het zijn *differenties*.

In de hierna volgende formules wordt met lineaire modellen gewerkt en wordt verondersteld, dat differenties ten opzichte van benaderde waarden en met dezelfde benaderde waarden bepaalde partiële afgeleiden worden bedoeld, als de modellen niet-lineair zijn.

Naast het model van waarnemingsvergelijkingen bestaat het complementaire model van voorwaardevergelijkingen:

$$\mathbf{B}^T \underline{y} - b_0 = \underline{t}, \text{ met } \mathbf{B}^T \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ en } \mathbf{B}^T a_0 = b_0. \quad (4.42)$$

De matrix $\mathbf{B}$ is de $(m \times b)$ -coëfficiëntenmatrix van de voorwaardevergelijkingen en b_0 is een b -vector van constante termen. Het aantal voorwaarden is het aantal vergelijkingen: b , waarvoor geldt: $b = m - n$. De vector $\underline{t}$ bevat de *sluitermen*, waarvan de verwachtingswaarden nul zijn: de voorwaarden moeten kloppen. In dit model komen geen parameters x voor. De afleiding en de formules voor dit model van voorwaardevergelijkingen zijn te vinden in bijvoorbeeld [Teunissen \(2000\)](#). De vereffenings- en toetsingsresultaten van het model van waarnemingsvergelijkingen en dat van voorwaardevergelijkingen zijn identiek. In vrijwel alle situaties kan een model van waarnemingsvergelijkingen worden herschreven als een model van voorwaardevergelijkingen en andersom.

4.5.2.1 Vijf waarnemingstypen

Wat is een waarneming? De filosoof Karl Popper stelde: “Observation is always observation in the light of theories”. Hij bedoelde daarmee, dat elke waarneming die we doen slechts mogelijk is door uit te gaan van veronderstellingen hoe de wereld in elkaar steekt. Als we een meetband aflezen, gaan we uit van veronderstellingen over de manier waarop licht de informatie op de meetband naar ons oog brengt, over de stabiliteit van het waargenomene, over de representativiteit van begin- en eindpunt van de meetband voor de afstand die we willen kennen, enzovoorts. Het kan zelfs zo zijn, dat we een waarneming, waarvoor heel veel theorie nodig is, bijvoorbeeld de waarneming van een ster door een sensor aan boord van een satelliet, een betere waarneming vinden dan een waarneming met minder theoretische aannames (het zien van die ster met het blote oog).

Wikipedia definieert (nl.wikipedia.org/wiki/perceptie): “Waarneming is het proces van het verwerven, registreren, interpreteren, selecteren en ordenen van zintuiglijke informatie”. De uitspraak van Popper hiermee combinerend, kan de conclusie worden getrokken, dat het doen van een waarneming met het blote oog, het doen van een waarneming met een meetinstrument en het resultaat van een complexe berekening van informatie van verschillende sensoren, onder hetzelfde begrip “waarneming” kan worden geschaard¹⁷.

Waarnemingstypen bij deformatie Alle waarnemingen die voor een deformatieanalyse van belang zijn en die in een getalswaarde kunnen worden uitgedrukt, worden samengenomen in vector $\underline{y}$ van vereffeningsmodel (4.41). Vijf waarnemingstypen worden onderscheiden.

¹⁷In de literatuur komt men het begrip “pseudowaarneming” tegen voor waarnemingen, die niet rechtstreeks met een instrument of met het blote oog zijn gedaan. Omdat er geen principieel verschil is tussen een instrumentele en een pseudowaarneming, wordt dat laatste begrip hier niet gebruikt.

1. Instrumentele waarnemingen per epoeche.
2. Waarnemingen of keuzes voor de schrankingsbasis.
3. Waarnemingen over configuratiedefecten.
4. Waarnemingen over deformaties en verbanden tussen epochen .
5. Waarnemingen voor inter- en extrapolatie.

Het vereffeningsmodel met waarnemingsvergelijkingen kan als volgt worden opgeschreven in de vorm van model (4.41):

$$\begin{array}{l}
 \text{instr. waarnemingen} \\
 \text{schrankingsbasis} \\
 \text{defecten} \\
 \text{deformaties en verbanden} \\
 \text{inter- en extrapolatie}
 \end{array}
 \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\ell} \\ \underline{s} \\ \underline{f} \\ \underline{d} \\ \underline{k} \end{pmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{L}_\xi & \mathbf{L}_\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_\xi & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_\xi & \mathbf{F}_\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_\xi & \mathbf{0} & \mathbf{D}_\nabla \\ \mathbf{K}_\xi & \mathbf{0} & \mathbf{K}_\nabla \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi \\ \nu \\ \nabla \end{pmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_\ell \\ \underline{e}_s \\ \underline{e}_f \\ \underline{e}_d \\ \underline{e}_k \end{pmatrix}}_{\underline{e}}. \quad (4.43)$$

De parametervector $\underline{x}$ bevat drie elementen. Elk element is een vector op zich:

- Vector ξ (Griekse letter ξ) bevat de coördinaten van alle epochen. In elke epoeche heeft elk punt andere coördinaatparameters. Door de waarnemingen $\underline{d}$ worden die coördinaatparameters aan elkaar gekoppeld. Als bijvoorbeeld een punt ongewijzigd is gebleven, zegt de betreffende waarneming, dat de verschillen tussen de x, y, z -coördinaten nul zijn.
- Vector ν (Griekse letter ν) bevat de zogenaamde stoorparameters. Dat zijn parameters die wel nodig zijn om de waarnemingsvergelijkingen op te stellen, maar die voor de toepassing geen verder belang hebben. Denk bijvoorbeeld aan de oriënteringsparameter bij een richtingswaarneming.
- Vector ∇ (spreek uit: nabla) bevat parameters die de deformaties beschrijven, bijvoorbeeld de coëfficiënten van een polynoom. Als de deformaties van verschillende deelpuntenvelden door verschillende polynomen of andere functies worden beschreven, bevat ∇ verschillende deelverzamelingen van parameters. De veranderingen van de coördinaten in vector ξ (aan te duiden als $\dot{\xi}$) kunnen onderdeel zijn van ∇ .

De vijf waarnemingstypen worden als volgt gekarakteriseerd:

1. Instrumentele waarnemingen zijn de per epoeche uitgevoerde geodetische waarnemingen (richtings- en afstandsmetingen, hoogteverschilmetingen, GNSS-basislijnen, enzovoorts).
2. Waarnemingen of keuzes voor de schrankingsbasis leggen die elementen van het referentiestelsel vast, die niet uit de instrumentele waarnemingen zijn te halen. Het betreft gewoonlijk de vastlegging van de oorsprong, de oriëntering en de schaal van het referentiestelsel. Het vastleggen kan bijvoorbeeld door in 3D voor zeven coördinaten willekeurige waarden te kiezen. Het vastleggen van de schrankingsbasis kan ook op andere manieren dan door middel van waarnemingen $\underline{s}$: eliminatie van parameters uit de parametervector, toevoeging van restricties op de parameters, of gebruik van een gegeneraliseerde inverse bij het oplossen van het model.
3. Binnen een epoeche en ook tussen epochen kunnen configuratiedefecten aanwezig zijn. Dat betekent, dat parameters in die epoeche(n) niet uit de waarnemingen bepaald kunnen worden. Het is een zelfde probleem als bij de schrankingsbasis, maar de reden is anders. Er ontbreken waarnemingen door een ontwerpfout, door verworpen waarnemingen of anderszins. Het probleem kan worden opgelost door de betreffende parameters en waarnemingen te schrappen in het model, maar een andere optie is waarnemingen $\underline{f}$ toe te voegen.
4. De waarnemingen $\underline{d}$ geven informatie over de deformaties die aanwezig zijn, of juist afwezig. Bij afwezigheid zegt een dergelijke waarneming bijvoorbeeld, dat de x -coördinaat van een punt j in epoeche 2 gelijk is aan de x -coördinaat van hetzelfde punt j in epoeche 3.
5. De waarnemingen $\underline{k}$ zijn bedoeld om de waarden van waarnemingen te interpoleren of extrapoleren. Vooral het bepalen van de covariantiefunctie, die wordt gebruikt om de varianties en covarianties van $\underline{k}$ te bepalen, is hier een lastige opgave.

In paragraaf 4.5.2.6 worden methoden gegeven om het vereffeningsmodel van vgl. (4.43) op te lossen volgens de methode van de kleinste kwadraten.

Het is mogelijk het model in delen te splitsen, bijvoorbeeld door bepaalde (groepen van) waarnemingen eerst ieder apart te vereffenen en daarna de resultaten samen te voegen. Voor de daarvoor geschikte technieken, bijvoorbeeld *Helmert's Block Method* (Teunissen, 2000, blz. 109) wordt, afgezien van de fase-gewijze aanpak, die in paragraaf 4.6 wordt behandeld, naar de literatuur verwezen.

4.5.2.2 Coördinaatverschillen als waarnemingen

Bij toepassing van een meettechniek als InSAR (Interferometric Synthetic Aperture Radar) worden (één- of meerdimensionale) coördinaatverschillen gemeten.

Door Odijk et al. (2003) wordt een model gegeven, dat InSAR-metgegevens en hoogteverschillen verkregen uit waterpassingen integreert in een vereffeningsmodel ter bepaling van hoogten en hoogteveranderingen. Het hier gepresenteerde model is algemener, omdat ook 2D- en 3D-coördinaten als parameters kunnen optreden. De gemeten coördinaatverschillen worden in de waarnemingsvector opgenomen. Omdat in de parametervector coördinaten staan, moeten ofwel andere metingen zorgen voor de positionering en oriëntering van het referentiestelsel, ofwel moet een schrankingsbasis worden gekozen om geschrante coördinaten te kunnen berekenen.

4.5.2.3 Schranking

In paragraaf 4.3.3.1 wordt gesteld, dat een deformatieanalyse probeert de veranderingen in vormgrootheden te analyseren om daaruit conclusies te trekken over de grootte en eventueel de snelheid van deformaties. In deze paragraaf 4.5 wordt verondersteld, dat geen gebruik wordt gemaakt van vormgrootheden, maar van coördinaten. Coördinaten leggen meer vast dan alleen de vorm en grootte. Om coördinaten te bepalen moet een oorsprong van het assenstelsel worden gekozen en de richtingen van de coördinaatassen moeten worden vastgelegd. Voor een deformatieanalyse zijn de ligging van de oorsprong en de richtingen van de coördinaatassen niet interessant: alleen de vorm en eventueel de grootte worden geanalyseerd. Dat betekent, dat de coördinaten aan een transformatie moeten kunnen worden onderworpen, die de vorm en eventueel de grootte ongewijzigd laat, zodat de deformatieanalyse niet wordt beïnvloed. Een transformatie, die de vorm ongewijzigd laat, is een gelijkvormigheidstransformatie. Een transformatie, die de vorm én grootte ongewijzigd laat, is een congruentietransformatie.

De deformatieanalyse moet niet alleen invariant zijn voor een gelijkvormigheidstransformatie of congruentietransformatie, maar ook voor een gelijkvormigheids- of congruentietransformatie van de covariantiematrix van de coördinaten. Voor het transformeren van een covariantiematrix wordt eerst de coördinatentransformatie gelineariseerd, waarna de voortplantingswet voor covarianties op de gelineariseerde transformatie wordt toegepast. Een dergelijke gelineariseerde gelijkvormigheidstransformatie of congruentietransformatie wordt een *schrankingstransformatie* of *S-transformatie* genoemd.

Omdat de schrankingstransformatie een gelineariseerde transformatie is, kunnen we schrijven:

$$\underline{\Delta\xi}^{(s_2)} = \mathbf{S} \underline{\Delta\xi}^{(s_1)}, \quad (4.44)$$

waar met (s_1) en (s_2) de eerste en tweede schrankingsbasis worden aangeduid en met $\underline{\Delta\xi}$ de coördinatendifferenties. De matrix $\mathbf{S}$ beschrijft de gelineariseerde transformatie.

Voor de covariantiematrix geldt volgens de voortplantingswet voor covarianties:

$$\mathbf{D}\{\underline{\xi}^{(s_2)}\} = \mathbf{S} \mathbf{D}\{\underline{\xi}^{(s_1)}\} \mathbf{S}^T, \quad (4.45)$$

Met een schrankingstransformatie kunnen coördinaten worden getransformeerd, maar dat is niet logisch, omdat daarvoor beter de niet-gelineariseerde transformatie kan worden gebruikt. De schrankingstransformatie wordt gebruikt om een covariantiematrix naar een andere schrankingsbasis te transformeren. Stel dat coördinaten bekend zijn met hun covariantiematrix, geschrant op een zekere schrankingsbasis. De covariantiematrix kan naar een andere basis worden getransformeerd, terwijl de coördinaten zelf ongewijzigd blijven. Belangrijk is de volgende constatering:

De beschrijving van de precisie van de vorm van een puntenveld is invariant onder een schrankingstransformatie als die een gelineariseerde gelijkvormigheidstransformatie betreft. Het woord “vorm” kan worden vervangen door “vorm en grootte” als de schrankingstransformatie een gelineariseerde congruentietransformatie is.

4.5.2.4 Ruimtelijke en temporele inter- en extrapolatie

Kriging en collocatie zijn aan de kleinste-kwadratenvereffening verwante methoden om meetwaarden op discrete punten in de ruimte en in de tijd te interpoleren of extrapoleren naar punten in de ruimte of naar tijdstippen, waarop geen waarnemingen zijn verricht. Om dit te realiseren wordt bij collocatie van covariantiefuncties of correlatiefuncties gebruik gemaakt. Bij kriging worden variogrammen gebruikt.

Dezelfde inter- en extrapolatie kan met model (4.43) worden gerealiseerd door in de parametervector x parameters op te nemen voor de coördinaten van de te inter- of extrapoleren punten of tijdstippen. In de waarnemingsvector y worden overeenkomstige waarnemingen opgenomen voor de toeslagen die de betreffende parameters moeten krijgen. De “waargenomen” waarden voor deze waarnemingen zijn nul. De standaardafwijkingen en covarianties voor deze waarnemingen worden bepaald door de genoemde covariantiefunctie of correlatiefunctie.

Ook voor de wél waargenomen punten en tijdstippen kunnen extra waarnemingen k in het model worden opgenomen. Daarmee kan *systeemruis* worden gemodelleerd, ofwel de natuurlijke variatie (ruis), die niet veroorzaakt wordt door het meetinstrumentarium, maar door zaken als de idealisatieprecisie, beheersprecisie en niet gemodelleerde deformatie-effecten (meestal met een hogere ruimtelijke en tijdsfrequentie dan de wel gemodelleerde effecten).

4.5.2.5 Singuliere covariantiematrix

De covariantiematrix van de waarnemingen kan nullen op de hoofddiagonaal hebben staan. Dat is hetzelfde als de constatering, dat sommige waarnemingen een standaardafwijking gelijk aan nul hebben. Dat kunnen waarnemingen uit de tweede, derde en vierde groep van paragraaf 4.5.2.1 zijn. Maar door specifieke omstandigheden kan het ook voor waarnemingen uit de overige groepen voorkomen. Als voor dergelijke waarnemingen ook wordt verondersteld, dat ze niet zijn gecorreleerd met enige andere waarneming, bestaan de betreffende rijen en kolommen in de covariantiematrix uit louter nullen. Een dergelijke covariantiematrix is *singulier*, meer specifiek: semidefiniet positief. Dit levert voor de standaardoplossing van het vereffeningsmodel met waarnemingsvergelijkingen een probleem op. De standaardoplossing gebruikt de gewichtsmatrix van de waarnemingen en daarvoor moet de covariantiematrix worden geïnverteerd. Doordat de matrix singulier is, is dat niet mogelijk. Er zijn verschillende oplossingsmethoden mogelijk.

1. De kleinste-kwadratenoplossing wordt bepaald met een *minimum Q_y -seminorm g -inverse* (Rao & Mitra, 1971, blz. 46). Een *g -inverse* is een gegeneraliseerde inverse en Q_y is de cofactorenmatrix (gewichtscoefficientenmatrix) van de waarnemingen y .
2. De covariantiematrix wordt geregulariseerd. Dit is een speciaal geval van oplossing 1. De vorm van het puntenveld en diens precisiebeschrijving is invariant voor een dergelijke regularisatie, maar de coördinaten en hun precisiebeschrijving niet.
3. Een basismatrix van de nulruimte van de coëfficiëntenmatrix wordt langs rekenkundige weg bepaald. Met deze basismatrix wordt een model van voorwaardevergelijkingen opgesteld. Dat model kan worden opgelost zonder invertering van de covariantiematrix.
4. De waarnemingen met een standaardafwijking nul en zonder correlatie met de andere waarnemingen worden uit de waarnemingsvector verwijderd en worden als restricties op de parameters opgevat en als zodanig vereffend. Daarvoor zijn verschillende methoden mogelijk, zie paragraaf 4.5.2.6.
5. Het vereffeningsmodel wordt in twee fasen gesplitst, die met een sequentiële vereffening na elkaar worden uitgevoerd. De tweede fase maakt gebruik van het vereffeningsmodel van voorwaardevergelijkingen.
6. De standaardafwijkingen in de covariantiematrix die nul zijn worden vervangen door waarden die groot genoeg zijn om een stabiele matrixinvertering te kunnen uitvoeren, maar die ook zo klein worden gehouden, dat de fouten in de resultaten kleiner zijn dan de eenheid, waarop zij worden afgerond.

Deze oplossingsmethoden zijn uitgewerkt in een nog te publiceren wetenschappelijke artikel ([Velsink, 2016b](#)). Daarin wordt niet alleen de vereffening, maar ook de toetsing van alternatieve hypothesen behandeld.

4.5.2.6 Oplossingsmethoden

Het vereffeningmodel (4.43) kan worden gezien als een standaardmodel van waarnemingsvergelijkingen, waaraan restricties worden opgelegd (derde standaardvraagstuk volgens [Tienstra \(1956\)](#)). De waarnemingen van de eerste en vijfde groep van paragraaf 4.5.2.1 zorgen voor “gewone” waarnemingsvergelijkingen. Deze waarnemingen hebben in het algemeen standaardafwijkingen, die niet nul zijn. Met de waarnemingen van de tweede, derde en vierde groep worden de restricties geconstrueerd. Zij hebben standaardafwijkingen die nul zijn. Het zijn daarmee, wat wordt genoemd “harde restricties”. Als deze waarnemingen standaardafwijkingen krijgen die groter zijn dan nul - en de waarnemingen in de vereffening dus *niet* ongewijzigd blijven - spreekt men van “zachte restricties”. De zachte restricties kunnen als “gewone” waarnemingen worden behandeld.

Het oplossen van een vereffeningmodel van waarnemingsvergelijkingen met restricties kan met de hierna staande methoden plaatsvinden. Methode 2 kan alleen worden toegepast voor harde restricties. De andere methoden zijn zowel voor harde als voor zachte restricties toepasbaar.

1. De methode zoals hiervoor beschreven. Alle waarnemingen, of de standaardafwijking nu nul is of niet, worden in model (4.43) gezet. Bij de oplossing wordt het probleem met de singuliere covariantiematrix opgelost, zoals in paragraaf 4.5.2.5 is beschreven.
2. De methode beschreven door [Tienstra \(1956, par. 7.3\)](#): de normaalvergelijkingen worden uitgebreid met de restricties.
3. De methode beschreven door [Tienstra \(1956, par. 7.4\)](#): de vereffening wordt uitgevoerd in twee stappen: eerst een vereffening zonder de restricties en dan een vervolgeffening van de vereffeningresultaten van de eerste stap met de restricties als voorwaardevergelijkingen. Dit is methode 5 uit de vorige paragraaf.
4. De basismatrix van de nulruimte van de restricties wordt rekenkundig bepaald. Daarmee wordt de coëfficiëntenmatrix gereduceerd tot een matrix met minder kolommen. Vervolgens wordt het als standaardmodel opgelost. Dit is beschreven door [Velsink \(2015a\)](#).
5. De basismatrix van de nulruimte van de coëfficiëntenmatrix wordt rekenkundig bepaald. Deze matrix kan worden gebruikt als de coëfficiëntenmatrix van het vereffeningmodel met voorwaardevergelijkingen. Met dit model kan een oplossing worden berekend zonder de covariantiematrix te hoeven inverteren. Dit is methode 3 uit de vorige paragraaf.

De berekende resultaten voor alle vijf methoden zijn identiek.

4.5.3 Fasegewijze aanpak

De beschreven aanpak bestaat uit een vereffening van alle metingen van alle epochen in één keer. Toch is dat in het algemeen slechts de laatste fase in een proces dat uit vele fasen bestaat. Het is aan te raden om de metingen van een epoeche eerst los van de overige epochen te vereffenen en te toetsen. Daarmee kunnen fouten, zowel meetfouten als andere fouten, uit het waarnemingsmateriaal worden gehaald. Het ontwerp van de metingen van één epoeche moet daarom voldoende betrouwbaar zijn. Daarmee wordt bedoeld dat er een zodanige meetopzet is gekozen en er een zodanige overtuiging van waarnemingen is, dat eventuele fouten in de metingen, die zodanig groot zijn, dat zij de conclusies over deformatie kunnen beïnvloeden, kunnen worden opgespoord. Een verkenningberekening van een epoeche is aan te raden. Bij een verkenningberekening worden de grenswaarden van de opspoorbare fouten in de waarnemingen berekend en wordt besloten of de grenswaarden voldoen aan de gestelde eisen.

Pas als alle epochen zijn vereffend en zo goed mogelijk alle aanwezige meet- en andere fouten zijn verwijderd, worden de epochen samengevoegd. Zelfs dan is het aan te raden, niet direct alle epochen te nemen, als dat er heel veel zijn, maar met deelverzamelingen te beginnen. De laatste stap is het samenvoegen van alle epochen, het analyseren daarvan en het trekken van conclusies.

4.5.4 Toetsen

De methode van de kleinste kwadraten levert optimale resultaten in de zin, dat vergeleken met andere vereffeningsmethoden¹⁸ de vereffende resultaten volgens de kleinste-kwadratenmethode de kleinste standaardafwijkingen hebben. Voor de voorwaarden waaronder dit geldt wordt naar de literatuur verwezen (Teunissen, 2000). Essentieel is wel, dat het functiemodel en het kansmodel juist zijn. Het functiemodel is bijv. vgl. (4.41). Het kansmodel is de aanname, dat de waarnemingen $\underline{y}$ normaal verdeeld zijn met een covariantiematrix $\mathbf{D}\{\underline{y}\}$. In deze paragraaf 4.5.4 wordt het toetsen van de juistheid van het functiemodel behandeld.

Voor het toetsen van het functiemodel worden een nulhypothese H_0 en een alternatieve hypothese H_a opgesteld:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad \underline{y} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + a_0 + \underline{e} \\ H_a : \quad \underline{y} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + a_0 + \mathbf{C}\nabla + \underline{e} \end{aligned} \quad (4.46)$$

De eerste vergelijking is vgl. (4.41). Bij de tweede komt een term $\mathbf{C}\nabla$ erbij, met $\mathbf{C}$ een $(m \times q)$ -coëfficiëntenmatrix en ∇ een q -vector met q onbekende parameters. De term $\mathbf{C}\nabla$ beschrijft de fout in het functiemodel.

De nulhypothese wordt tegen de alternatieve hypothese getoetst door de toetsingsgrootheid $\underline{T}_q$ te berekenen (Teunissen, 2006):

$$\underline{T}_q = \hat{\underline{r}}^T \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{r}}} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \hat{\underline{r}}, \quad (4.47)$$

met

$$\begin{aligned} \hat{\underline{r}} &= \mathbf{Q}_y^{-1} \hat{\underline{e}}, \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{r}}} &= \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{Q}_{\hat{\underline{e}}} \mathbf{Q}_y^{-1}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

De gewichtscoefficiëntenmatrix $\mathbf{Q}_y$ kan singulier zijn (zie par. 4.5.2.5), waardoor de inverse $\mathbf{Q}_y^{-1}$ niet is te berekenen. Dat $\underline{T}_q$ dan nog steeds een goede toetsingsgrootheid is en hoe hij moet worden berekend, wordt behandeld in een nog te verschijnen artikel (Velsink, 2016b).

De kansdichtheidsfunctie van $\underline{T}_q$ is een χ^2 -verdeling met een verwachtingswaarde van q . Toetsing vindt plaats door een significantieniveau α te kiezen, de kritieke waarde te bepalen en te toetsen of de berekende waarde van $\underline{T}_q$ groter is dan de kritieke waarde. Als dat zo is, wordt de nulhypothese verworpen ten gunste van de alternatieve hypothese (Teunissen, 2006).

Op welke fouten in het functiemodel moet worden getoetst? Als we daar ideeën over hebben, kunnen we de matrix $\mathbf{C}$ specificeren. Als de veronderstelde fouten een niet-lineair verband hebben met de parameters ∇ , moet een linearisatie worden uitgevoerd.

Als we geen idee hebben, of er iets fout is, kunnen we slechts algemene toetsen uitvoeren. In de Nederlandse geodesie is het gebruikelijk in dat geval de algemene toets van het model uit te voeren; q is dan gelijk aan $m-n$: de overtalligheid van het model. Daarnaast worden conventionele w -toetsen uitgevoerd (het één voor één toetsen van elke waarneming, of daar een fout in zit). Bij een conventionele w -toets geldt $q=1$ en $\mathbf{C} = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T$, met de 1 op de plek van de waarneming, die op een fout wordt getoetst.

4.5.4.1 Deformatiemodellen toetsen

Geén deformatie als nulhypothese Bij deformatieanalyse wordt getoetst of een deformatie heeft plaatsgevonden door een deformatiehypothese op te stellen en de hypothese te toetsen. De methode, die is beschreven in paragraaf 4.5.4, kan worden gebruikt. Bij een stabiliteitsanalyse wordt er geen deformatie verwacht en is er geen specifieke alternatieve hypothese. De toetsing blijft beperkt tot de algemene modeltoets. Als die tot verwerping van de nulhypothese leidt, moet worden gezocht naar een specifieke alternatieve hypothese, die het verwerpen zou kunnen verklaren. Men kan beginnen met de conventionele alternatieve hypothesen, genoemd in paragraaf 4.5.4, maar men kan ook systematisch andere hypothesen proberen. In de volgende twee paragrafen worden mogelijkheden voor dergelijke alternatieve hypothesen besproken.

¹⁸Andere vereffeningsmethoden: bijvoorbeeld vereffening volgens de L_1 -norm (de som van de absolute waarden van de correcties is minimaal) of de L_∞ -norm (de maximale correctie wordt geminimaliseerd). De kleinste-kwadratenmethode minimaliseert de L_2 -norm.

De nulhypothese bij het toetsen is in het algemeen, dat er geen deformatie is opgetreden, tenzij over de deformatie geen twijfel bestaat en goed kan worden gemodelleerd.

De nulhypothese wordt geformuleerd met vgl. (4.43) door de waarnemingen $\underline{d}$ te schrijven als een eenvoudige gelijkheid: de x -, y - en z -coördinaat van elk punt in epoche i en die in epoche j worden aan elkaar gelijk gesteld. De vector ∇ ontbreekt.

Een alternatieve hypothese wordt opgesteld, dat een deformatie is opgetreden, beschreven door de vector ∇ . De alternatieve hypothese wordt getoetst tegen de nulhypothese met de toets, die is beschreven in paragraaf 4.5.4.

Eenvoudige modellen: verschuiven van deelpuntenvelden De conventionele w-toetsen zijn geschikt om waarnemingen als richtings- en afstandsmetingen te toetsen op fouten. In dat geval is het goed voorstelbaar, dat een enkele waarneming foutief is. De matrix $\mathbf{C}$ bestaat uit slechts één kolom en $q = 1$. We spreken van een ééndimensionale toets. Bij het toetsen van de $\underline{d}$ -waarnemingen voor een 2D- of 3D-analyse is het logischer om twee- of driedimensionale toetsen uit te voeren. Als één punt is verplaatst, zijn, in 3D, zowel de x -, y - als z -coördinaat veranderd. We kunnen spreken van conventionele punttoetsen. De matrix $\mathbf{C}$ is:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Het is eenvoudig de matrix $\mathbf{C}$ te formuleren voor de situatie dat niet één, maar twee, drie of meer punten zijn verplaatst. Als alle punten precies dezelfde verplaatsing hebben ondergaan, is er nog steeds sprake van een twee- of driedimensionale toets: de matrix $\mathbf{C}$ bestaat uit twee of uit drie kolommen (voor respectievelijk 2D en 3D). De matrix is die van vgl. (4.49) met een (3×3) -eenheidsmatrix voor elk van de punten, die mogelijk verplaatst zijn.

Als twee deelpuntenvelden kunnen worden onderscheiden, die elk uit meer punten bestaat, maar waarbij alle punten van één deelpuntenveld dezelfde verplaatsing hebben ondergaan, bestaat de matrix $\mathbf{C}$ uit zes kolommen (in 3D), de eerste drie voor het eerste deelpuntenveld en de tweede drie voor het tweede deelpuntenveld. In de drie kolommen van een deelpuntenveld staan (3×3) -eenheidsmatrices voor de punten, die verplaatst zijn.

Complexe modellen Het formuleren van complexe deformatiemodellen betekent, dat wiskundig wordt beschreven hoe de coördinaten van de punten wijzigen in de tijd. Dat gebeurt door de matrix $\mathbf{C}$ in vgl. (4.46) te specificeren. De parameters in vector ∇ beschrijven de deformatie. Als de wiskundige beschrijving niet lineair is, moet het verband eerst worden gelineariseerd en werkt het vereffeningsmodel met differentiële grootheden (zie paragraaf 4.5.2).

Ook nu vindt toetsing van de deformatie plaats door een nulhypothese te nemen, waarin de vector $\mathbf{C}\nabla$ ontbreekt en een alternatieve hypothese mét die vector. Vervolgens wordt de alternatieve hypothese tegen de nulhypothese getoetst met de methode, beschreven in paragraaf 4.5.4.

De wiskundige beschrijving van de deformatie, die met de vector $\mathbf{C}\nabla$ wordt gerealiseerd, beschrijft de *trend* van de deformatie. Afwijkingen van de trend kunnen een systematisch karakter hebben en in de ruimte of in de tijd gecorreleerd zijn. Het bepalen van deze systematische trendafwijkingen wordt in paragraaf 4.5.2.4 behandeld.

Schatting van de deformatie Als de nulhypothese wordt verworpen, kan een schatting van de deformatie worden verkregen door de kleinste-kwadratenschatting van ∇ te berekenen. Deze wordt verkre-

gen met:

$$\hat{\underline{\mathbf{V}}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{r}}} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{r}} \quad (4.50)$$

4.5.4.2 Grenswaarde-ellips(oïd)en en -hyperellipsoiden

Om een deformatieanalyse te kunnen uitvoeren, vindt berekening plaats van de grenswaarde-ellips(oïd)en van de waarnemingen $\underline{\hat{d}}$ in vereffeningsmodel (4.43). Deze ellips(oïd)en geven informatie over de deformatie in een enkel punt, die door de toetsing van paragraaf 4.5.4.1 kan worden gevonden. Het betreft de punttoets, beschreven met matrix $\mathbf{C}$ van vgl. (4.49).

Voor de meer ingewikkelde alternatieve hypothesen van paragraaf 4.5.4.1 kunnen grenswaarde-hyperellipsoiden worden berekend. De toevoeging “hyper” betekent, dat de ellipsoïde niet driedimensionaal is, maar een hogere dimensie heeft. Daardoor is hij niet meer te tekenen. We kunnen wel de lengtes van de halve lange assen berekenen en de projecties op de coördinaatassen bepalen.

4.5.5 Normering

Normering vindt plaats door maximale grenswaarde-(hyper)ellipsoiden te bepalen, uitgaande van de doelstellingen van de deformatiemeting.

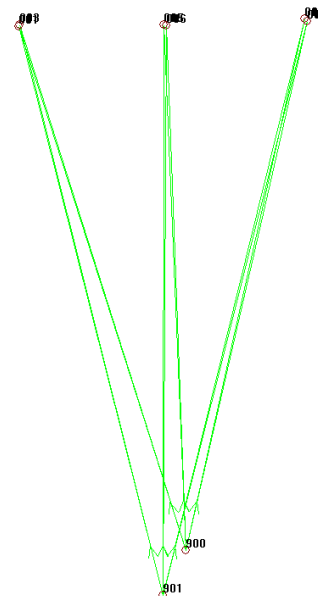
4.5.6 Voorbeeld

Een rekenvoorbeeld van een deformatieanalyse met richtings- en afstandsmetingen wordt gegeven. Met een tachymeter is in twee epochen een zestal punten aangemeten op een gebouw, 3 paren met steeds een laag punt en een hoog punt. De standplaats van de tachymeter is niet verzekerd en verschilt daardoor voor elke epoque, zie figuur 4.14. De afstand van de standplaatsen tot de objectpunten is tussen 25 m en 28 m. Per epoque worden zes horizontale richtingsmetingen, zes zenithoeken en zes afstandsmetingen (schuin) uitgevoerd. Voor de standaardafwijking van de richtingsmetingen en zenithoeken wordt 0,3 mgon genomen (absoluut, geen relatief gedeelte) en voor de afstandsmetingen 1 mm (absoluut, geen relatief gedeelte). Voor de objectpunten wordt een idealisatieprecisie van 0,5 mm aangenomen. Er wordt een stabiliteitsanalyse uitgevoerd met het softwarepakket MOVE3 en daarvoor wordt voor elk punt een verschuivingsvector van 0 m als waarneming ingevoerd. Dat betekent een waargenomen x -, y - en z -verschil van 0 m, waarvoor een standaardafwijking van 0,1 mm wordt genomen. De “waarneming” is in dit geval de constatering volgens de nulhypothese, dat er geen deformatie heeft plaatsgevonden. Aan de constatering wordt enige ‘ruimte’ gegeven door een standaardafwijking van 0,1 mm te nemen.

De waarnemingen zijn gegenereerd met het programma Octave (een freewarevariant van Matlab). In de y -coördinaat van punt 1 is kunstmatig een deformatie van 10 mm aangebracht.

De grenswaarden van de x -, y - en z -elementen van de verschuivingsvectoren zijn berekend door MOVE3 en staan in tabel 4.3. Versie 4.3.0 van MOVE3 kan ook een driedimensionale toetsing van de punten uitvoeren.

Ter vergelijking: de standaardafwijkingen van de vereffende coördinaten, berekend ten opzichte van de schrankingsbasis, die gevormd wordt door de beide standplaatsen en de hoogte van punt 1 liggen



Figuur 4.14: Zes punten tachymetrisch aangemeten in twee epochen (3D)

puntnr.	x	y	z
1	3,4	6,8	2,9
2	3,4	6,4	3,0
3	3,2	6,2	3,4
4	3,2	5,4	3,3
5	3,1	5,6	3,3
6	3,0	5,4	3,4

Tabel 4.3: Eéndimensionale grenswaarden van opspoorbare deformaties in mm (significantieniveau: 0,1%, onderscheidingsvermogen: 80%)

tussen 0 en 16,2 mm. Eigenlijk valt er weinig te vergelijken, omdat door de afhankelijkheid van de schrankingsbasis de standaardafwijkingen weinig gedetailleerde informatie kunnen geven.

Bij de toetsing van de vereffening blijkt de y -component van de verschuivingsvecor van punt 1 de grootste absolute w -waarde op te leveren ($|w| = 7,30$). De geschatte deformatie is 12,1 mm.

Merk op, dat het ontwerp van deze fictieve deformatiemeting niet goed is voor de individuele epochemeting. Per epoeche is de overtalligheid en daardoor de betrouwbaarheid volstrekt onvoldoende. Als bij de deformatieanalyse verschillen per punt worden geconstateerd, weet men daardoor niet of de oorzaak een deformatie is of een meetfout in de epochemeting.

4.6 Deformatieanalyse met coördinaten

In paragraaf 4.4.1 zijn twee methoden aangegeven om een deformatieanalyse met coördinaten uit te voeren. Voor de tweede methode wordt het analyseproces in twee Tienstrafasen geknipt, zie figuur 4.13. In de eerste fase worden de waarnemingen voor iedere epoeche apart verwerkt en coördinaten berekend, inclusief hun covariantiematrix. Volgens de *principal property* van prof. Tienstra (blz. 52) moet de covariantiematrix worden meegenomen naar de tweede fase om hetzelfde resultaat te verkrijgen als met de eerste methode van paragraaf 4.4.1.

In de tweede fase worden de coördinaten geanalyseerd in een apart vereffeningsmodel, waarin de berekende coördinaten van alle epochen worden samengenomen.

In het project DefoGuide is uitgezocht hoe het vereffeningsmodel voor de tweede fase eruit ziet en hoe het kan worden opgelost en getoetst. Het wordt hier niet nader uitgewerkt, omdat het in een wetenschappelijk artikel is beschreven (Velsink, 2016c). Hier wordt slechts de Nederlandse vertaling van de Engelstalige samenvatting van het artikel gegeven.

Samenvatting artikel over tijdreeksanalyse van 3d-coördinaten (Velsink, 2016c) Het vereffenen en toetsen van een combinatie van stochastische en niet-stochastische waarnemingen wordt toegepast op de deformatieanalyse van een tijdreeks van 3D-coördinaten. Niet-stochastische waarnemingen zijn constante waarden die worden behandeld alsof ze waarnemingen zijn. Ze worden gebruikt om restricties aan de onbekende parameters van het vereffeningsprobleem te formuleren. Zo beschrijven zij deformatiepatronen. Als deformatie afwezig is, worden de epochen van de tijdreeks geacht te zijn verbonden via affiene, gelijkvormigheids- of congruentietransformaties. Het toetsen van deformatiepatronen met toetsen, die invariant zijn voor een wijziging van de S -basis, wordt behandeld. Het model is experimenteel gevalideerd door het uitvoeren van de procedure voor een puntenverzameling van 3D-coördinaten, berekend vanuit total-stationmetingen gedurende vijf epochen. Het modelleren van twee deformatiepatronen: de beweging van slechts één punt gedurende verschillende epochen, en ook van verschillende punten, is beschreven. Volledige, rangdeficiënte covariantiematrices van 3D-coördinaten die volgen uit een vrije netwerkvereffening van de total-stationmetingen van elke epoeche, worden gebruikt in de analyse.

Grenswaarden en conventionele toetsen In het artikel wordt beschreven hoe grenswaarden, grenswaarde-ellipsen, grenswaarde-ellipsoïden en grenswaardehyperellipsoïden worden berekend. Laten ze worden samengevat onder de term “grenswaarden”. Het gaat hier vooral om de grenswaarden van de niet-stochastische waarnemingen, d.w.z. van de restricties die de deformaties beschrijven. Twee eigenschappen van grenswaarden van deze restricties worden benadrukt.

1. De grenswaarden beschrijven de groottes van de deformaties, die met een gekozen referentiekans (het onderscheidingsvermogen, vaak wordt 80% gekozen), met de betreffende toets van een deformatie(patroom) kunnen worden opgespoord. Ze zijn daarmee bij uitstek geschikt om eisen en normen te formuleren, waaraan een deformatiemeting moet voldoen.
2. De grenswaarden van de deformatiepatronen zijn onafhankelijk van de gekozen S-basis.

Grenswaarden kunnen worden berekend voor zogenaamde *conventionele w-toetsen*, *conventionele punt-toetsen* en voor complexe deformatiepatronen. Met *conventioneel* wordt bedoeld, dat een standaardserie van toetsen wordt uitgevoerd. Vanuit het vereffenen van geodetische waarnemingen volgens de methode van de Delftse School zijn de conventionele w-toetsen wel bekend. Daarbij wordt elke waarneming langsgesgaan en wordt getoetst of die waarneming foutief is, maar alle andere waarnemingen niet. Bij deformatieanalyse komen daar de conventionele punttoetsen bij. De gedachte is dat het een logische aanpak is om elk punt, waarvan 2D- of 3D-coördinaten beschikbaar zijn, te toetsen op deformatie. Een verschuiving in alléén de x-richting, of y- dan wel z-richting, is niet waarschijnlijk. Daarom wordt getoetst of een punt in de twee- of driedimensionale ruimte is verschoven, ofwel of zowel in de x-, y- als z-richting een verschuiving is opgetreden. Dit kan met behulp van twee- en driedimensionale toetsen. *Conventioneel* wil nu opnieuw zeggen, dat systematisch elk punt wordt getoetst, of dat punt is verschoven, terwijl alle andere punten niet zijn verschoven.

Dat meer dan één punt is verschoven, kan bij deformaties gemakkelijk voorkomen. Om dat te toetsen moet een aparte toets worden uitgevoerd, waarvoor aparte grenswaarden kunnen worden berekend. Het is niet zo, dat als twee punten zijn verschoven, het uitvoeren van de twee conventionele punttoetsen van deze twee punten de best mogelijke toets is. Zij leveren slechts een vermoeden, waar een deformatie aanwezig kan zijn. Het vermoeden moet worden getoetst met de genoemde aparte toets.

Als de deformatiemeting wordt opgezet om heel specifiek deformatiegedrag te toetsen (bijvoorbeeld het verschuiven van een kademuur), is het aan te raden, de specifieke toets daarvoor te formuleren. De daarbij behorende grenswaarden kunnen worden gebruikt als norm voor bijvoorbeeld een offerteaanvraag.

Deformatiesignalen In het artikel van [Velsink \(2016a\)](#) wordt beschreven, hoe “relaxatie” van deformatiepatronen mogelijk is. Dat betekent dat bijvoorbeeld het ontbreken van deformatie niet als harde restrictie aan de betreffende coördinaten wordt opgelegd, maar dat er een standaardafwijking aan wordt gegeven. Er kan dan toch enige beweging in het punt zitten. Die beweging kan als stochastisch signaal worden gemodelleerd. Dat betekent, dat het signaal in het punt gecorreleerd is met signalen van nabijgelegen punten (correlatie in de ruimte) of met signalen van hetzelfde punt eerder of later in de tijd (correlatie in de tijd). Het artikel beschrijft hoe een vereffening en toetsing plaatsvindt als er een dergelijk signaal is. De techniek komt overeen met wat in de literatuur wordt aangeduid als “collocatie” of “kriging”.

4.7 Conclusies over de analyse van positieveranderingen

1. Een deformatieanalyse analyseert de vorm- en grootteverandering van objecten. Als de objecten zijn gemodelleerd als twee- of driedimensionale puntenvelden, komt de analyse van vormveranderingen overeen met de analyse van veranderingen in II- resp. P-grootheden.
2. Het is doelmatig in plaats van II- en P-grootheden, coördinaten voor de analyse van vorm- en grootteveranderingen te gebruiken. Schraning van de coördinaten is noodzakelijk.
3. Absolute deformatieanalyse is een specifieke vorm van van relatieve deformatieanalyse en moet als zodanig worden uitgevoerd.

4. Relatieve precisie voor puntcoördinaten is gedefinieerd als de precisie ten opzichte van een schrankingsbasis.
5. Een deformatieanalyse moet invariant zijn voor een wijziging van de schrankingsbasis.
6. Referentie- en objectpunten moeten gelijktijdig, rekening houdend met hun respectievelijke covariantiematrices, worden geanalyseerd. Het “vasthouden” van referentiepunten bij de analyse van objectpunten geeft een suboptimale toetsing en kwaliteitsbeschrijving.
7. Punten moeten in de samenhang van het puntenveld, waar zij deel van uitmaken, worden geanalyseerd.
8. Bij deformatieanalyse moeten de drie fasen van eerst de verkenning met de kwaliteitsbeschrijving, dan de meting en tenslotte de toetsing en het conclusies trekken duidelijk van elkaar worden onderscheiden. De drie fasen zijn wel onlosmakelijk met elkaar verbonden: de kwaliteitsbeschrijving heeft betrekking op een specifieke vorm van toetsing en de getrokken conclusies zijn gebaseerd op diezelfde toetsing.
9. Grenswaarde-ellipsen, -ellipsoiden en -hyperellipsoiden zijn geschikte grootheden om te kwantificeren hoe groot de minimaal opspoorbare deformaties zijn, gebaseerd op een specifieke keuze van significantieniveaus en onderscheidingsvermogen.
Normering van minimaal opspoorbare deformaties kan op deze grootheden worden gebaseerd.
10. Bij de presentatie van de toetsingsresultaten van een deformatieanalyse moet worden vermeld welk significantieniveau is gehanteerd. Bij de kwaliteitsbeschrijving moeten bij gepresenteerde grenswaarde(hyper)ellips(oid)en significantieniveau en grenswaarde van het onderscheidingsvermogen worden vermeld. De wijze waarop de vermelding plaatsvindt kan worden aangepast aan degenen aan wie wordt gepresenteerd (van geodetisch-wiskundige terminologie voor geodetisch deskundigen tot een algemene term als “statistisch significant” voor een lekenpubliek).
11. Deformatieanalyse kan plaatsvinden door:
 - (a) ofwel een vereffeningsmodel op te stellen, waarin de verzamelde waarnemingen van verschillende epochen worden samengevoegd en vereffend, waarbij in datzelfde vereffeningsmodel wordt getoetst op zowel meetfouten als deformatiehypothesen (een stapsgewijze aanpak wordt wel gevolgd: eerst iedere epoeche, eventueel zelfs delen van een epoeche, vereffenen en toetsen om meetfouten op te sporen; dan twee of slechts enkele epochen analyseren; daarna pas alles in één integrale vereffening samenvoegen);
 - (b) ofwel de verzamelde waarnemingen van verschillende epochen eerst per epoeche te vereffenen en te toetsen, waaruit coördinaten en hun covariantiematrices volgen; daarna de coördinaten van alle epochen samen te voegen en via een aansluitingsluitingsvereffening te vereffenen en te toetsen op deformatiehypothesen.
12. Bij het opsplitsen van een vereffening en toetsing in fasen of stappen moet de *principal property* van prof. Tienstra worden gehanteerd. Alle tussenresultaten moeten inclusief de covariantiematrix worden berekend en bij het gebruiken van de tussenresultaten in een vervolgfase of -stap moet de covariantiematrix worden meegenomen.
13. Het gebruik van een vervangingsmatrix voor een covariantiematrix (bijvoorbeeld een geschaalde eenheidsmatrix of een diagonaalmatrix) is slechts verantwoord, als een inschatting is gemaakt van de effecten van de vereenvoudiging op de berekende resultaten.
14. Een covariantiematrix of een vervangingsmatrix moet altijd worden geschrinkt, of een gelijkvormigheidstransformatie, dan wel een congruentietransformatie, moet in het vereffeningsmodel van de deformatieanalyse zijn opgenomen.
15. Deformatiehypothesen kunnen zich beperken tot eenvoudige hypothesen, waarin bijvoorbeeld slechts één punt gedeformeerd is, maar kunnen ook complexe hypothesen zijn, die de deformatie van één of meer deelpuntenvelden omvatten; het kunnen zelfs zeer complexe hypothesen zijn, waarbij wordt verondersteld, dat een deelpuntenveld een bepaalde beweging ondergaat, die met een analytische functie wordt beschreven; of die bestaan uit een trend, beschreven door een analytische functie en een signaal, beschreven met een empirisch bepaalde covariantiefunctie.

16. De software in binnen- en buitenland, die aan de auteur bekend is, kan op dit moment (januari 2015) slechts een zeer beperkt deel van dergelijke alternatieve hypothesen toetsen.

Hoofdstuk 5

Software

5.1 Software voor deformatieanalyse - stand mei 2016

Deze paragraaf geeft een overzicht van op de markt beschikbare software voor geodetische deformatieanalyse. Het overzicht is niet-uitputtend en de auteur verontschuldigt zich, als mocht blijken, dat belangrijke software niet wordt vermeld. De auteur krijgt graag informatie daarover toegestuurd. Het overzicht is toegespitst op software die voor de Nederlandse markt bruikbaar is of zou kunnen zijn. Hoe “bruikbaar” wordt gedefinieerd, is hier niet nader uitgewerkt. De auteur heeft het naar eigen inzicht ingevuld.

Enkele hoofdfuncties zijn van belang voor goede software voor geodetische deformatieanalyse:

1. Vereffening, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van elke epoche apart.
2. Vereffening, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van de epochen gezamenlijk en het toetsen op deformaties.
3. Grafische presentatie van de deformatieanalyse.
4. Opslag en beheer van de data van de afzonderlijke epochen en de uitgevoerde analyses in een gestructureerde database.

Nederlandse software: De Nederlandse software wordt in aparte paragrafen behandeld, zie verderop.

Internationaal (en Engelstalig):

- GeoMoS van Leica-Geosystems (www.leica-geosystems.nl). Dit systeem is bedoeld voor gebruik met de apparatuur van Leica-Geosystems en kan vereffenen, opslaan, beheren en grafisch presenteren. Het kan daarom alle hierboven genoemde vier functies uitvoeren. De technologie is afkomstig van het in Berlijn gevestigde Technet ([nieuwsbericht van Leica](#)). Naar verwacht mag worden is de methode die wordt gebruikt om de slogan “Statistical significance of movements = better decision making” (tekst op de internetpagina) te realiseren, gebaseerd op de methodes, die beschreven zijn door Lothar Gründig en Ivo Milev ([Gründig et al., 1985](#); [Milev, 2001](#)), ten tijde van de publicaties werkzaam voor Technet. Deze methode is vergelijkbaar met de *Hannoverse methode*. Voor de basiskennis over deze laatste methode, waarvan de grondlegger prof. Pelzer van de universiteit te Hannover is geweest, wordt verwezen naar de artikelen van prof. Pelzer en specifiek naar twee artikelen van prof. Niemeier ([Pelzer, 1985](#), blz. 527-623).

De van Technet overgenomen vereffeningstechnologie bestaat uit het programma *Neptan* (voor het vereffenen van geodetische netwerken) en *Defan* (voor de deformatieanalyse).

Duitse software:

- JAG3D (sourceforge.net). Dit is “open source” software en dus gratis te verkrijgen. Het is software voor het vereffenen van geodetische netwerken (1D, 2D, 3D). Voor deformatieanalyse is de vergelijking van twee epochen mogelijk. Gebruik wordt gemaakt van de Hannoverse methode.
- PANDA (www.geotec-gmbh.de). Ook dit is software voor het vereffenen van geodetische netwerken (1D, 2D, 3D), waaraan een module voor deformatieanalyse is toegevoegd. De leverancier is gevestigd in Laatzen bij Hannover. Welke methode voor deformatieanalyse wordt gebruikt is dan ook duidelijk.
- Een overzicht van Duitse geodetische software is [hier](#) te vinden. Niet aangegeven is, of er deformatieanalyses mee kunnen worden uitgevoerd.

Amerikaanse software:

- SMS (www.pecaconsult.com). Een internetpagina van dit softwarepakket meldt: “.. SMS provides precise survey results suitable for applications in subsidence and settlement monitoring. ... Users perform the survey and the software compute the movements, generate charts and provide trend analysis. ... System is flexible and provides for 3-D input such as GPS/Traverse to assist in deformation analysis”.
- Columbus (bestfit.com) en StarNet (www.microsurvey.com) zijn Amerikaanse pakketten voor de vereffening en toetsing van geodetische netwerken. Hun internetpagina's besteden geen speciale aandacht aan deformatieanalyse en het lijkt erop dat er geen functionaliteit voor is.

Portugese software (Engelstalig):

- Softwarepakket “Epoch-Suite” van het bedrijf “EngSolvers” (www.engsolvers.com). De internetpagina's zijn niet beschikbaar op het moment van schrijven (14 mei 2016) en geven de melding “This site has stepped out for a bit”. Eerder was op de pagina's te lezen, dat Epoch-Suite is “a suite of programs to import, manage and store multiple epochs of observations and to compute XYZ components of displacement vectors and coordinates”.

5.2 MOVE3

MOVE3 is een softwarepakket voor vereffening, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van geodetische netwerken. Het heeft zich ontwikkeld tot een de-facto-standaardpakket, wat onder meer blijkt uit de *Productspecificatie Deformatiemeting Kunstwerken* van Rijkswaterstaat (door andere opdrachtgevers eveneens als norm gehanteerd), waarin MOVE3 wordt voorgeschreven. MOVE3 had geen specifieke mogelijkheden voor deformatieanalyse, maar met versie 4.2.0 (vrijgegeven in oktober 2013) is het waarnemingstype “verschuivingsvector” in MOVE3 ingevoerd. Het is een eenvoudig waarnemingstype: tussen punten wordt het x-, y- en z-verschil gemeten. De manier waarop hiermee een deformatieanalyse wordt uitgevoerd is als volgt:

- Alle punten krijgen een puntnummer, waarin het epochnummer is opgenomen. Als hetzelfde punt in twee of meer epochen is aangemeten (wat natuurlijk bij een deformatiemeting zo veel mogelijk het geval is), levert dat twee of meer punten op: steeds hetzelfde puntnummer, maar met steeds andere epochnummers. Het resultaat is een MOVE3-project, waarin twee of meer volledig “losse” geodetische netwerken aanwezig zijn: voor elke epoche een apart netwerk.
- Als een punt in epoche 1 en epoche 2 voorkomt, zijn er twee punten: bijvoorbeeld genaamd punt A-1 en punt A-2. Tussen deze twee punten wordt een *verschuivingsvector* als waarneming ingevoerd. Voor de drie waarnemingen van deze vector (een x-, y- en z-verschil) wordt *nul* ingevoerd. Evenzo gebeurt dat voor A-2 en A-3, enzovoorts. Als standaardafwijking wordt een hele kleine waarde ingevoerd, overeenkomend met de puntruis. Dit gebeurt voor alle punten. Op deze wijze worden de losse netwerken aan elkaar gekoppeld.

- De kleinste-kwadratenvereffening wordt uitgevoerd. Veronderstel, dat de losse netwerken (dus de afzonderlijke epochen) goed ontworpen zijn met een goede betrouwbaarheid, en dat de epochen ieder afzonderlijk zijn vereffend en getoetst. Als dat geen verwerpingen (meer) oplevert, is de kans, dat er meetfouten in de afzonderlijke epochen zitten, klein. Als de gecombineerde vereffening van alle epochen wordt verworpen, duidt dat erop, dat een deformatie aannemelijk is. MOVE3 voert een toets (afhankelijk van het netwerk een 1D-, 2D- of 3D-toets) op de verschuivingsvectoren uit. Daarmee wordt getoetst of het betreffende punt aan deformatie onderhevig is in het betreffende epoche-interval.

De toetsing van verschuivingsvectoren is een krachtig hulpmiddel, waarmee een statistisch verantwoorde stabiliteitstoets kan worden uitgevoerd conform het analysemodel, zoals dat in deze rapportage is beschreven. Als informatie voorhanden is over een verwacht deformatiepatroon, kunnen de daaruit volgende deformatieverwachtingen in de verschuivingsvectoren worden ingevoerd en getoetst.

5.3 Software Antea Group

Ten behoeve van de analyse van bodemdaling door mijnbouw (met name zoutwinning) is door het ingenieursbureau Antea Group (voorheen: Oranjewoud) een rekenhulpmiddel in Microsoft Excel met Visual Basic ontwikkeld (Antea Group noemt het een deformatieanalysetool). Met het rekenhulpmiddel wordt het aandeel in de bodemdaling door de mijnbouw bepaald. Daarvoor worden de autonome, buiten de mijnbouw gelegen, invloeden weggefilterd. Het doel van het rekenhulpmiddel is het bepalen van de vereiste meetfrequentie en van de mogelijke omvang van de productie.

Het rekenhulpmiddel is in 2005 ontwikkeld door Arnaud Mensen, destijds medewerker van Oranjewoud, op basis van de theorie in het dictaat van ir. H.M.E. Verhoef ([Verhoef, 1994](#)). Voordat de analyse kan worden uitgevoerd, worden de individuele epochen met MOVE3 vereffend. De analyse wordt in drie fasen uitgevoerd:

1. stabiliteitsanalyse van de referentiepunten;
2. deformatieanalyse van de objectpunten;
3. voorspelling van de deformatie van objectpunten.

De analyse vindt per punt plaats. Het is mogelijk lineaire trends met behulp van een kleinste-kwadratenvereffening te bepalen. Toetsing vindt plaats volgens de methodiek van de Delftse school. Grenswaarden voor bepaling van de interne betrouwbaarheid kunnen worden berekend.

Met kwadratische interpolatie kan ruimtelijke interpolatie van deformaties worden uitgevoerd.

Grafische presentatie van de deformaties is mogelijk.

De toepassing van dit rekenhulpmiddel is beperkt gebleven tot de analyses, die Antea Group uitvoert ten behoeve van de zoutwinning. De functionaliteit is beperkt, als zij wordt vergeleken met het model, zoals dat in de hoofdstukken 3 en 4 wordt behandeld. Maar vergeleken met de deformatieanalyses, zoals die momenteel in veel Nederlandse praktijksituaties worden uitgevoerd, is het rekenhulpmiddel geavanceerd en is het jammer, dat het niet meer toepassing heeft gevonden.

5.4 NAM-software

Al vele jaren werkt de NAM samen met de Technische Universiteit Delft om goede analysemodellen te ontwikkelen voor de bodemdalingsanalyse, wat heeft geresulteerd in publicaties, bijvoorbeeld ([de Heus et al., 1994](#)), en in software (SCAN DEFO). De theorie is ook terug te vinden in het collegedictaat van ir. H.M.E. Verhoef ([Verhoef, 1994](#)).

5.5 TU Delft

De TU Delft is al vele jaren actief met het ontwikkelen van theorieën en software voor de vereffening, toetsing en kwaliteitsbeschrijving van geodetische netwerken en ook voor deformatieanalyse. De ontwikkelde software is SCAN3 met enkele varianten. De laatste jaren is van SCAN3 losstaande software ontwikkeld in het kader van het onderzoek. In de groep van prof. Hanssen is met name software ontwikkeld - en wordt nog steeds ontwikkeld - voor deformatieanalyse met behulp van metingen afkomstig van InSAR (satellietradarinterferometrie).

5.6 Skygeo

Het bedrijf Skygeo (voorheen Hansje Brinker) is ontstaan als uitvloeisel van het onderzoek van de groep van prof. Hanssen aan de TU Delft. Monitoring (inclusief software daarvoor) van het aardoppervlak met behulp van InSAR (satellietradarinterferometrie) is de specialisatie van het bedrijf.

5.7 Houtenbos' SuRe

Ir. A.P.E.M. Houtenbos, oud-medewerker van de NAM, houdt zich ook na zijn pensionering actief bezig met de bodemdaling die wordt veroorzaakt door de mijnbouw en met name met de analyse van metingen om bodemdaling te bepalen. Hij heeft een model opgesteld waarin hoogtemetingen en hun standaardafwijkingen gebruikt worden om hoogteveranderingen te bepalen met een kleinste-kwadratenvereffening. Het model kan rekening houden met stochastische ruis, die de coördinaten van punten in het model hebben, en stochastische ruis van de veronderstelde trend in de deformatiepatronen (systeemruis). Ir. Houtenbos heeft zijn model geïmplementeerd in een MATLAB-programma: SuRe.

Het model wordt behandeld in de handleiding van het programma SuRe. De auteur heeft de beschikking over de versie van augustus 2011, verkregen van de ir. Houtenbos zelf ([Houtenbos, 2011](#)). De principes achter het model zijn terug te vinden in het rapport van ir. Houtenbos en ir. F. Kenselaar ([Houtenbos & Kenselaar, 2001](#)) en in het artikel van ir. F. Kenselaar en ir. R. Quadvlieg ([Kenselaar & Quadvlieg, 2001](#)). De publicaties van ir. Houtenbos over zijn bodemdalingsanalyses zijn te vinden op internet (www.waddenzee.nl).

5.8 Hiddo's Matlabprogramma's

Door de auteur zijn twee MATLAB-programma's gemaakt om de theorie van de modellen in deze rapportage te testen. Het zijn *lstrans3d* en *CoDefAn*. Beide programma's kunnen coördinaten en hun covariantiematrix vanuit MOVE3 inlezen en er een deformatieanalyse mee uitvoeren.

De programma's gebruiken het model zoals beschreven in paragraaf 4.6.

Het programma *lstrans3d* kan de coördinaten van twee epochen verwerken. In dit programma is de mogelijkheid ingebouwd om automatisch allerlei combinaties van punten te onderzoeken op deformatie, zoals beschreven in het artikel uit 2015 in *Journal of Geodesy* ([Velsink, 2015b](#)).

Het programma *CoDefAn* kan de coördinaten en hun covariantiematrix van meer dan twee epochen verwerken. Eenvoudige deformatiepatronen (in de tijd lineaire beweging van één of meer punten gedurende meer dan twee epochen) kunnen worden getoetst. Het is geschreven ten behoeve van het artikel ([Velsink, 2016c](#)) (een deformatievoorbeeld, waarbij vijf van vijftien punten lineair bewegen gedurende vijf epochen). Inmiddels wordt het programma gebruikt voor onderzoek met deformatiemetingen uit de Nederlandse beroepspraktijk.

Hoofdstuk 6

Conclusies

Deze rapportage van het project *DefoGuide* probeert antwoorden te geven op de onderzoeksvraag:

“Hoe ziet een model eruit dat de domeinen, de belangrijkste spelers, de wetgeving, de meettechnieken en de producten van geodetische deformatiemetingen (gdm) beschrijft en dat kan worden gebruikt als basis voor normen die gehanteerd worden bij de aansturing en aanbesteding van gdm?”

De domeinen, waar geodetische deformatiemetingen (gdm) worden toegepast, en de belangrijkste spelers zijn geïnventariseerd. De wetgeving is op een rij gezet, maar niet volledig uitgediept, omdat uit de analyse van de *Industrieleidraad Mijnbouw*, de *Productspecificaties Deformatiemeting Kunstwerken* (van Rijkswaterstaat) en een offerteuitvraag voor de Europese aanbesteding van een kademuur voldoende duidelijk werd, wat in de wetgeving is geregeld en vooral *niet* is geregeld ten aanzien van de nauwkeurigheidseisen voor gdm.

De analyses geven aan, dat de statistische onderbouwing van eisen en normen in opdrachten voor gdm zwak is en dat er onmogelijke formuleringen worden gebruikt.

Eisen worden in het algemeen gesteld in termen van proceseisen en niet van producteisen. Daardoor is functioneel aanbesteden van gdm vrijwel niet mogelijk en is aanbesteden op prijs gebruikelijk.

De formulering van eisen aan de geometrische nauwkeurigheid in offerteuitvragen is gebleken zodanig onduidelijk te zijn, dat een groot deel van het onderzoek is besteed aan het opzetten van een goed analysemodel voor gdm.

Het *product* van gdm is gedefinieerd als: “een verzameling van uitspraken over het *deformatiepatroon* van een geo-object. De functie van de uitspraken is het leveren van onderbouwingen voor uitspraken over de *risico's* van menselijk handelen ten aanzien van het betreffende geo-object.”

Om het deformatiepatroon te bepalen is een analysemodel opgezet. Voor zowel hoogteveranderingen als positieveranderingen is onderzocht, hoe een model voor vereffening, toetsing en kwaliteitsbeschrijving eruit kan zien. De fundamentele rol van de begrippen *vorm* en *grootte* is uitgewerkt, evenals de noodzaak om puntenvelden te beschouwen en niet individuele punten. Daaruit volgt het grote belang van het *schraken* van hoogtes en coördinaten. Evenzo is het grote belang van het goede gebruik van *covariantiematrices* en van de *principal property* van prof. Tienstra duidelijk geworden.

Hoe een dergelijk vereffeningsmodel kan worden opgesteld en berekend is volledig uitgewerkt in een drietal wetenschappelijke artikelen.

Voor de kwaliteitsbeschrijving van een deformatieanalysemodel spelen grenswaarden, grenswaarde-ellipsen en grenswaarde-ellips(oïd)en van alternatieve hypothesen, dat enkele punten of deelpuntenvelden gedurende meer epochen een deformatie ondergaan, een belangrijke rol. Deze grootheden kunnen dienen als basis voor het formuleren van *normen*.

Duidelijk is geworden, dat *standaardafwijkingen* voor het formuleren van normen minder geschikt zijn.

De gedetailleerde conclusies over het analysemodel zijn aan het eind van de hoofdstukken 3 en 4 te vinden.

Het analysemodel vormt het middelpunt van het *normeringsmodel*, dat in hoofdstuk 2 is uitgewerkt en in een schema is gevisualiseerd.

Een overzicht van op de markt aanwezige software is in hoofdstuk 5 gegeven. De software kan (nog?) niet volledig voldoen aan de eisen van het analysemodel, zoals dat in deze rapportage is geformuleerd, maar de eerste aanzetten daartoe zijn inmiddels gezet.

Referenties

- Baarda, W. (1966a). *Puntsbepalingsystemen in het platte vlak. Berekening met complexe getallen. Eerste en tweede deel. Veelhoek- en driehoekfiguraties. Heruitgave* (stencilled ed.). Computing Centre of the Delft Geodetic Institute, Delft.
- Baarda, W. (1966b). *Schrinkingstransformaties*. Technical report, Laboratorium voor Geodetische Reken-techniek, Technische Hogeschool Delft (now: Delft University of Technology).
- Baarda, W. (1968a). *Enkele inleidende beschouwingen tot de "B-Methode" van toetsen*. Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek, Technische Hogeschool Delft.
- Baarda, W. (1968b). *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*, volume 2, no 5 of *Publications on Geodesy New Series*. Netherlands Geodetic Commission.
- Baarda, W. (1973). *S-transformations and Criterion Matrices*, volume 5, no 1 of *Publications on Geodesy New Series*. Netherlands Geodetic Commission.
- de Heus, H. M., Joosten, P., Martens, M. H. F., & Verhoef, H. M. E. (1994). Geodetische deformatie analyse: 1d- deformatieanalyse uit waterpasnetwerken. Technical Report 5, Delft University of Technology, LGR Series, Delft.
- Gründig, L., Neureither, M., & Bahndorf, J. (1985). Detection and Localization of Geometrical Move-ments. *Journal of Surveying Engineering*, 2(111), 118–132.
- Houtenbos, A. (2011). Subsidence Residual Monitoring - SuRe User Manual - prepared for SuRe-licensees - Version 1. Technical report, Geodetic Consultancy.
- Houtenbos, A. & Kenselaar, F. (2001). Peilmerk hoogte variaties - stochastische analyse van peilmerkbe-weging in Nederland. Technical report, Technische Universiteit Delft.
- Kenselaar, F. & Quadvlieg, R. (2001). Trend-signal modelling of land subsidence. In 10th *FIG International Symposium on Deformation Measurements, Orange, California, USA, 19–22 March, 2001*, (pp. 336–345).
- Milev, I. (2001). *Integrierte Modelle zur Physikalischen Interpretation Geodätischer Deformationsuntersuchun-gen*. Doctoral thesis, Technische Universität Berlin, ehemalige Fakultät VI - Bauingenieurwesen und Angewandte Geowissenschaften.
- Odijk, D., Kenselaar, F., & Hanssen, R. F. (2003). Integration of leveling and InSAR data for land subsi-dence monitoring. In 11th *FIG International Symposium on Deformation Measurements, Santorini, Greece, 2003*.
- Pelzer, H. e. (1985). *Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II: Vorträge des Kontaktstudiums in Hannover*. Number Bd. 13 in *Vermessungswesen bei Konrad Wittwer*. K. Wittwer.
- Polman, J. & Salzmann, M. (1996). *Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster*. Kadaster, Apeldoorn.
- Popper, K. (1959,1972). *The Logic of Scientific Discovery* (Sixth (revised) ed.). Hutchinson of London.
- Rao, C. R. & Mitra, S. K. (1971). *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley.
- Rijkswaterstaat (2014). *Productspecificaties Deformatiemeting Kunstwerken*.
- Teunissen, P. J. G. (2000). *Adjustment theory, an introduction*. VSSD, Delft.
- Teunissen, P. J. G. (2006). *Testing theory, an introduction*. VSSD, Delft.

- Tienstra, J. (1956). *Theory of the Adjustment of Normally Distributed Observations*. Argus.
- Torge, W. & Müller, J. (2012). *Geodesy*. De Gruyter.
- van Mierlo, J. (1976). Hogere Geodesie - een schets. Lecture Notes: Technische Hogeschool Delft (Delft University of Technology).
- Velsink, H. (1998). Waarnemingsrekening voor toepassing in de geodesie, volumes 1, 2, 3 and 4. Lecture Notes Hogeschool Utrecht (Utrecht University of Applied Sciences), Course of Geodesy.
- Velsink, H. (2015a). Extendable linearised adjustment model for deformation analysis. *Survey Review*, 47(345), 397–410.
- Velsink, H. (2015b). On the deformation analysis of point fields. *Journal of Geodesy*, 89(11), 1071–1087.
- Velsink, H. (2016a). Geodetic deformation analysis using nonstochastic observations. *submitted*, -.
- Velsink, H. (2016b). Testing adjustment models with constraints using nonstochastic observations. *to be submitted*, -.
- Velsink, H. (2016c). Time series analysis of 3D coordinates using nonstochastic observations. *Journal of Applied Geodesy*, 10(1), 5–16.
- Verhoef, H. M. (1994). *Geodetische Deformatie Analyse (ge 135)*. Lecture Notes Delft University of Technology, Faculty of Geodesy, Section MGP.
- Welsch, W. M. (1983). Finite element analysis of strain patterns from geodetic observations across a plate margin. *Tectonophysics*, 97, 57–71.
- Welsch, W. M. & Heunecke, O. (2001). Models and terminology for the analysis of geodetic monitoring observations. Official Report of the Ad-Hoc Committee of FIG Working Group 6.1, the 10th FIG International Symposium on Deformation Measurements.

Bijlage A

Formules van de kleinste-kwadratenmethode

Overgenomen uit het dictaat "Waarnemingsrekening voor toepassing in de geodesie, deel 3" ([Velsink, 1998](#)).

Formules voor de vereffening

Het model (niet-lineair)

<i>A-model</i>	$E\{\underline{y}\} = \underset{\text{vectorfunctie}}{A} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x \end{pmatrix}}$	$\underset{\text{vectorfunctie}}{B} \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} E\{\underline{y}\} \end{pmatrix}} = \underset{b \times 1}{0}$	<i>B-model</i>
	$A \rightarrow \partial_x A(x_0)$ $a_0 \rightarrow 0$ $\underline{y} \rightarrow \underline{\Delta y} = \underline{y} - y_0$ $x \rightarrow \underline{\Delta x} = x - x_0$	$B^T \rightarrow \partial_y B(y_0)$ $b_0 \rightarrow 0$ $\underline{y} \rightarrow \underline{\Delta y} = \underline{y} - y_0$	
<i>benaderde waarden</i>	$y_0 = A(x_0)$	$B(y_0) = 0$	<i>benaderde waarden</i>
<i>Voor iteratie van het A-model zie het iteratieschema</i>		<i>Iteratie van het B-model is niet behandeld</i>	

Het model (lineair)

<i>A-model</i>	$E\{\underline{y}\} = \underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{x} + \underset{m \times 1}{a_0}$	$\underset{b \times m}{B^T} \underset{m \times 1}{E\{\underline{y}\}} - \underset{b \times 1}{b_0} = \underset{b \times 1}{0}$	<i>B-model</i>
<i>D</i> : covariantiematrix <i>Q</i> : matrix van gewichtscoëfficiënten σ^2 : variantiefactor	$\underset{m \times m}{D\{\underline{y}\}} = \sigma^2 \underset{m \times m}{Q_y}$	$\underset{m \times m}{D\{\underline{y}\}} = \sigma^2 \underset{m \times m}{Q_y}$	<i>D</i> : covariantiematrix <i>Q</i> : matrix van gewichtscoëfficiënten σ^2 : variantiefactor
$\underline{e}$: toevallige afwijkingen	$\underline{y} = A x + a_0 + \underline{e}$	$B^T \underline{y} - b_0 = \underline{t}$	$\underline{t}$: sluittermen
<i>na vereffening</i>	$\underline{\hat{y}} = A \underline{\hat{x}} + a_0$	$B^T \underline{\hat{y}} - b_0 = 0$	<i>na vereffening</i>

Oplossing volgens de methode der kleinste kwadraten

		$Q_t = B^T Q_y B$	
	$Q_{\hat{x}} = (A^T Q_y^{-1} A)^{-1}$	$\underline{t} = B^T \underline{y} - b_0$	sluittermen (lineair)
geschatte parameters	$\hat{x} = Q_{\hat{x}} A^T Q_y^{-1} (\underline{y} - a_0)$	$\underline{t} = B (\underline{y})$	sluittermen (niet-lineair)
vereffende waarnemingen	$\hat{y} = A \hat{x} + a_0$	$\hat{e} = Q_y B Q_t^{-1} \underline{t}$	geschatte toevallige afwijkingen
geschatte toevallige afwijkingen	$\hat{e} = \underline{y} - \hat{y}$	$\hat{y} = \underline{y} - \hat{e}$	vereffende waarnemingen
controle	$A^T Q_y^{-1} \hat{e} = 0$	$B^T \hat{e} = \underline{t}$	controle

Matrices van gewichtscoefficienten

$Q_{\hat{x}} = (A^T Q_y^{-1} A)^{-1}$	$Q_t = B^T Q_y B$
$Q_{\hat{y}} = A Q_{\hat{x}} A^T$	$Q_{\hat{r}} = B Q_t^{-1} B^T$
$Q_{\hat{e}} = Q_y - Q_{\hat{y}}$	$Q_{\hat{e}} = Q_y Q_{\hat{r}} Q_y$
$Q_{\hat{r}} = Q_y^{-1} Q_{\hat{e}} Q_y^{-1}$	$Q_{\hat{y}} = Q_y - Q_{\hat{e}}$
$Q_{\hat{x} \hat{e}} = 0$	$Q_{\hat{y} \hat{e}} = 0$

A-model met restricties

Model

$$\underline{y} = A x + a_0 + \underline{e}$$

$$G x = g$$

Kleinste-kwadratenoplossing

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \underline{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T Q_y^{-1} A & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^T Q_y^{-1} (\underline{y} - a_0) \\ g \end{pmatrix}$$

Formules voor de toetsing

Toetsing van de nulhypothese tegen een alternatieve hypothese

<i>nulhypothese</i>	$E\{\underline{y}\} = A \underline{x} + a_0$	$B^T E\{\underline{y}\} - b_0 = 0$	<i>nulhypothese</i>
<i>alternatieve hypothese</i>	$E\{\underline{y}\} = A \underline{x} + a_0 + C \nabla$	$B^T E\{\underline{y}\} - b_0 = B^T C \nabla$	<i>alternatieve hypothese</i>
<i>geschatte reciproque toevallige afwijkingen</i>	$\hat{\underline{r}} = Q_y^{-1} \hat{\underline{e}}$	$\hat{\underline{r}} = B Q_t^{-1} \underline{t}$	<i>geschatte reciproque toevallige afwijkingen</i>
	$Q_{\hat{\underline{r}}} = Q_y^{-1} Q_{\hat{\underline{e}}} Q_y^{-1}$	$Q_{\hat{\underline{r}}} = B Q_t^{-1} B^T$	
<i>q-dimensionale verschuivingsgrootheid</i> : $\underline{V}_q = \hat{\underline{r}}^T C (C^T Q_{\hat{\underline{r}}} C)^{-1} C^T \hat{\underline{r}}$			
<i>q-dimensionale toetsingsgrootheid</i> : $\underline{T}_q = \frac{\underline{V}_q}{\sigma^2}$			
<i>a-posteriori-variantiefactor</i> : $\hat{\sigma}^2 = \frac{\underline{V}_q}{q}$			
<i>toets</i> : als $\underline{F}_{q, \infty} = \frac{\underline{V}_q}{q \sigma^2} > F_k$ dan nulhypothese verwerpen			
<i>geschatte fouten</i> : $\hat{\underline{\nabla}} = (C^T Q_{\hat{\underline{r}}} C)^{-1} C^T \hat{\underline{r}}$			

w-toetsingsgrootheid

$$\underline{w} = \frac{c^T \hat{\underline{r}}}{\sigma \sqrt{c^T Q_{\hat{\underline{r}}} c}}$$

w-toets voor toetsen per waarneming

Covariantiematrix van de geschatte toevallige afwijkingen	$D\{\hat{\underline{e}}\} = \sigma^2 Q_{\hat{\underline{e}}}$
standaardafwijking van de i -de geschatte toevallige afwijking $\sigma_{\hat{e}_i}$	wortel uit i -de element van de hoofddiagonaal van $D\{\hat{\underline{e}}\}$
toetsingsgrootheid w_i als Q_y een diagonaalmatrix is	$\underline{w}_i = \frac{\hat{e}_i}{\sigma_{\hat{e}_i}}$
conventionele w-toets van de i -de waarneming	als $\underline{w}_i > 3,29$ wordt de waarneming verworpen

Algemene toets van het model

Verschuivingsgrootheid $\underline{V}_b$

$$\begin{aligned} \underline{V}_b &= \underline{t}^T Q_t^{-1} \underline{t} \\ \underline{V}_b &= \hat{\underline{e}}^T Q_y^{-1} \hat{\underline{e}} \end{aligned}$$

De geschatte variantiefactor is $\hat{\sigma}^2 = \frac{V_b}{b}$. Daarmee wordt de toetsingsgrootheid berekend:

$$\underline{F}_{b,\infty} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{V_b}{b\sigma^2}$$

Als $\underline{F}_{b,\infty} > F_k$ dan wordt het model verworpen. F_k is de kritieke waarde, die bepaald kan worden uit de tabel van kritieke waarden van de F-toets (volgens B-methode).

Toetsingsquotiënt

$$\text{toetsingsquotiënt} = \frac{F_{q,\infty}}{F_k} = \frac{T_q}{\chi_k^2}$$

Parameters voor de B-methode van toetsen

<i>onbetrouwbaarheidsdrempel voor $q=1$</i>	α_0	0,1 %
<i>onderscheidingsvermogen</i>	γ_0	80 %
<i>niet-centraliteitsparameter</i>	λ_0	17,075
<i>onbetrouwbaarheidsdrempel voor $q>1$</i>	α	wordt berekend uit α_0, γ_0 en λ_0

Kwaliteitsbeschrijving

Interne betrouwbaarheid

<i>grenswaarde als $q = 1$</i>	$\nabla_0 = \sigma \sqrt{\frac{\lambda_0}{c^T Q_{\hat{r}} c}}$	$\nabla_0 y = c \nabla_0$
<i>kwadraat van de genormaliseerde grenswaarde</i>	$\lambda_y = \frac{1}{\sigma^2} \nabla_0 y^T Q_y^{-1} \nabla_0 y$	
<i>redundantiegetal</i>	$h = \frac{\lambda_0}{\lambda_y}$	

Bijlage B

Neiging en assen van een ellips

In deze bijlage wordt getoond hoe uit de vergelijking van de ellips

$$x^2 + y^2 - xy = \frac{3}{2}\sigma^2\lambda_0 \quad (\text{B.1})$$

de neiging van de lange as ten opzichte van de x -as en de lengtes van de halve lange assen a en b kunnen worden berekend.

De vergelijking van een ellips, waarvan het centrum in de oorsprong ligt en de hoofdasen samenvallen met de x - en y -coördinaatas, kan worden geschreven als:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (\text{B.2})$$

Van de ellips van vgl. (B.1) maken de hoofdasen een hoek met de coördinaatassen. Dat is te zien aan het feit dat er een kruisterm ($-xy$) is. We gaan het coördinatenstelsel draaien over een zodanige hoek, dat deze kruisterm wegvalt, waarmee de ellips in de vorm (B.2) geschreven kan worden. Om de onderstaande formules eenvoudiger te houden, schrijven we vgl. (B.1) in de vorm:

$$(x')^2 + (y')^2 - x'y' = \frac{3}{2}\sigma^2\lambda_0. \quad (\text{B.3})$$

De rotatie over een hoek φ vindt plaats met de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Dit wordt ingevuld in vgl. (B.3):

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\sigma^2\lambda_0 &= (x \cos \varphi - y \sin \varphi)^2 + (x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 + \\ &\quad - (x \cos \varphi - y \sin \varphi)(x \sin \varphi + y \cos \varphi). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Uitwerking hiervan geeft:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\sigma^2\lambda_0 &= x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi - 2xy \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi + 2xy \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad - x^2 \sin \varphi \cos \varphi + y^2 \sin \varphi \cos \varphi + xy \sin^2 \varphi - xy \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Uitwerking en herschikking levert:

$$\frac{3}{2}\sigma^2\lambda_0 = x^2 + y^2 - x^2 \sin \varphi \cos \varphi + y^2 \sin \varphi \cos \varphi + xy(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi). \quad (\text{B.7})$$

De kruisterm met xy moet wegvallen, dus moet gelden:

$$\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = 0. \quad (\text{B.8})$$

Hieruit volgt, dat $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ (modulo π), of $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$ (modulo π). Dit is de hoek, die de lange as met de x -as maakt.

Neem $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ en vul dat in vgl. (B.7) in:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\sigma^2\lambda_0 &= x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \\ &\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Dit kan worden geschreven als:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3\lambda_0}\sigma}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\lambda_0}\sigma}\right)^2 = 1. \tag{B.10}$$

Hieruit volgt voor de halve lange as a en de halve korte as b :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3\lambda_0}\sigma; \\ b &= \sqrt{\lambda_0}\sigma. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Bijlage C

Projectbeschrijving DefoGuide

Zie volgende bladzijden.

Cooperation Programme Maps4Society – Proposal DefoGuide

16 February 2014

1. Title:

Guidelines for Geodetic Deformation Monitoring

2. Short title

DefoGuide

3. KIP proposal

Yes

4. Names and addresses of the applicants

Name: Prof.dr.ir. R.F. Hanssen (Ramon)
Address: Section Geoscience and Remote Sensing, Delft University of Technology
PO Box 5048, NL - 2600 GA Delft
Phone: +31 15 278 3662
Email: R.F.Hanssen@tudelft.nl

Name: ir. H. Velsink (Hiddo)
Address: Institute of Built Environment, University of Applied Sciences Utrecht
PO Box 182, NL – AD Utrecht
Phone: +31 6 456 42 463
Email: Hiddo.Velsink@hu.nl

5. Expertise of the applicants including a maximum of 5 key publications

[Ramon Hanssen](#) is full professor in Geodesy. His expertise is in geodesy, radar remote sensing, space science and technology and mathematical geodesy and positioning. His current research interests in his work at TU Delft are the geodetic analysis of imaging remote sensing data, the influence of atmospheric delay on space-geodetic techniques, and the mathematical modelling and physical interpretation of deformation processes.

[Hiddo Velsink](#) is associate lector. His expertise is in geodesy, mathematical geodesy & positioning and geodetic deformation monitoring, and in education management. He performs a PhD research into communication, governance, techniques and standardisation of geodetic deformation measurements. This research is done within the research group on [Extended Enterprise Studies](#) of the University of AS Utrecht under guidance of dr. J. Versendaal, professor. The academic university supervisor is prof. Hanssen of the TU Delft.

Key publications:

- Hanssen, R.F., *Radar Interferometry: Data Interpretation and Error Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001. 328 pp. ISBN: 0-7923-6945-9.
- Miguel Caro Cuenca, Andrew J. Hooper, Ramon F. Hanssen, Surface deformation induced by water influx in the abandoned coal mines in Limburg, The Netherlands observed by satellite radar interferometry. *Journal of Applied Geophysics*, 88(1): 1-11, 2013.

- Velsink, H., Who says that the Netherlands are subsidizing? Towards a taxonomy of governance arrangements for geodetic deformation measurements. *Proceedings Geomonitoring 2012*, Braunschweig, 2012.
- Velsink H., *Waarnemingsrekening voor toepassing in de geodesie*, volumes 1, 2, 3 and 4. Lecture Notes Utrecht University of Applied Sciences, Course of Geodesy, 1998.
- Polman, J., Salzmann, M.A., (red), Velsink, H. (co-author) *et al.*, *Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster*, ISBN 90-803078-1-5, 1996.

6. Research and applications areas

Research Areas: Dynamic data and harmonisation, Data quality assessment, Geo-information infrastructure governance

Application area: Deformation monitoring

Standards are necessary to cope with circumstances and developments in gdm, as sketched below. A workable model that lays the foundation for the development of such standards and the writing of standardising guide lines, comparable to the *Industrieleidraad* of the mining industry, the *Productspecificaties* of Rijkswaterstaat, or the HTW1996 of the Dutch Cadastre, applicable in all domains of gdm and ready for the years to come, is envisaged.

Geodetic deformation monitoring (gdm) is performed in many domains of society: residential building, infrastructure and non-residential building, hydraulic engineering, mining industry, industrial installations and long term research of changes of the earth's crust on a continental scale. Policy, governance and execution differ significantly between these domains because of differences in history, legislation, available resources and monitored objects. Common are the potentially large, sometimes extremely large, economic and financial, and therefore societal, consequences of conclusions drawn from monitoring analysis (cf. the recent government decisions on gas extraction in Groningen). Common is also the small amount of geodetic specialists, capable of guiding gdm.

Scientific research in gdm in the academia in the Netherlands is rather limited and most of its effort is directed towards the mining industry, where strict legislation and large financial interests stimulate such research. In the other domains research is mostly limited, except for the mentioned long-term-research, to in-project applied research aimed at answering short-term demands.

Standards in the field of gdm are hardly present in the Netherlands. The mining industry is working at the moment on an "Industrieleidraad ter Geodetische bepaling van bodembeweging als gevolg van mijnbouwactiviteiten". In the domain of non-residential building at state level, Rijkswaterstaat uses a "Productspecificaties Deformatiemeting Kunstwerken". For deformation monitoring in other domains these product specifications are used as well, due to the lack of anything better, although the requirements in other domains can be quite different. The product specifications of Rijkswaterstaat have been influenced by a history where Rijkswaterstaat itself did most of the measurements. The specifications are still mostly process-oriented, i.e. they describe the processes, not the products of a deformation analysis. Describing these products without reference to measuring techniques and the necessary processes, is however not an easy task. Also defining the products unambiguously is a challenge.

An example of a successful standard in geodesy in the Netherlands is the "Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster, 1996 (HTW1996)", which is aimed at geodetic cadastral activities, that are quite different from gdm activities, but have also important similarities.

The field of gdm is changing rapidly because of outsourcing monitoring activities, because of new monitoring techniques, of new construction techniques that require more precise monitoring and of increasing public awareness of deformation risks. Standards, based on thoroughly researched and sound principles, can play an important role in the scientific and economic development of this field.

7. Objectives of the project

The project objective is to design a model for standards in gdm.

The research question is: *How does a model look like that describes the domains, the key players, the legislation, the measuring techniques and the products of gdm, which model can be used as the basis of standards to be used in the management and the tendering of gdm?*

The model will be applicable to answer questions like:

- How to define products of a geodetic deformation analysis?
- For which domains can the model be used?
- What general similarities and differences exist in the legislation in those domains?
- Which standards already exist and what system underlies these standards?
- What techniques can be used for the geodetic deformation measurements?
- How do you set up standards that are specific and practically applicable, but also general enough to be used for different measuring techniques?
- How does a well-defined tender look like, and what organizational and contractual implications does it include?
- What is the relation with existing standards in neighbouring fields of activity and with European standardisation policy?

The model can be used to write standardisation guide lines for gdm.

The scientific challenge of this research is defining and validating different abstraction levels of products of gdm in such a way that in different domains, under different legislation, using different measuring techniques, the same terminology can be used and on an adequate abstraction level the same standards for the products of monitoring can be applied.

8. Expected results and implementation in industry and society

Expected results

A conceptual model will be built that describes the domains, the key players, the legislation, the measuring techniques and the products of gdm. The model will use a unified terminology, will distinguish different levels of abstraction and will be applicable for defining standards. As far as time and resources suffice examples of written standards, based on the model, will be elaborated upon. The model will be validated by the partners in such a way that utilisation is guaranteed. A report and at least one paper will be devoted to it. The report will give attention to the follow-up of research and implementation. A symposium will be organised to discuss and disseminate the research results.

Implementation

The research will be done in close cooperation with professional practice, which means that in building the model and in validating it, the partners will be consulted and involved. Implementing the model means writing standardisation guide lines, which will be possible with the help of the model.

Business partners

Rijkswaterstaat (Ministry of Infrastructure and the Environment) and three Engineering Consultancies Grontmij Nederland, Fugro Geoservices and Antea Group (Oranjewoud) support this proposal.

Rijkswaterstaat is not only the guardian of the *Productspecificaties*, but also one of the largest principals of gdm. Contact person is C. den Besten.

Grontmij Nederland B.V. is both experienced in executing gdm, and owns the de-facto standard software in the Netherlands for processing geodetic measurements. Adapting this software to the requirements of gdm can be done significantly more effectively if standards are available. Contact person is G. Verkuijl.

Fugro GeoServices B.V. is the Dutch operating company of Fugro N.V.. Accurate and reliable monitoring of deformations is one of Fugro's prime competences and of great importance to their clients in industries such as oil & gas, mining, construction and infrastructure. Contact person is M. Kodde.

Antea Group is a major player in the field of deformation studies, both with data gathering, analytic studies and monitoring. Antea Group is for many years active in surface monitoring for the mining industry, involved in the "Industrie Leidraad Mijnbouw" and active in deformation studies for Rijkswaterstaat and construction companies. Contact persons are A. Ooms and K. Hoentjen.

Economic revenues and open innovation

Innovation of gdm in the Netherlands is mostly done separately by companies and government within the restricted context of a small application domain or a construction project, often limited by narrow financial resources. There is little academic exchange of knowledge, except for the mining industry and long term research at national or continental scale. By issuing a standardisation model and derived standardisation guide lines it is expected that knowledge exchange, exchange of practical experiences and therefore open innovation will be considerably promoted with consequently large economic revenues.

9. Provisional patent search results

No patents are known that relate to a standardisation model for gdm.

10. Budget forecast

The budget forecast is as follows:

PhD student	€ 40,000
Travel	€ 2,000
Symposium	€ 4,000
Materials	€ 2,000
Report	€ 2,000

The partners co-finance the project in kind by making available consulting capacity and necessary data, software and existing internal standards and specifications.

11. References

See the internet links and publications in section 5.

Index

- a-priori-informatie, 51
- algemene toets van het model, 18
- Antea Group
 - deformatieanalysetool, 75
- χ^2 -verdeling, 40
- coördinaten
 - cartesiaanse, 54
- correlatie, 45
- correlatiefunctie, 64
- covariantiefunctie, 19, 64
- deformatie
 - relatieve, 21
- deformatieanalyse
 - absolute, 53
 - relatieve, 53
- deformatiepatroon, 16
- eindige-elementenmethode, 50
- elementaire locatie-indicator, 18
- epoche, 60
- fasegewijze aanpak, 65
- gdm, 6, 9, 77
- gegeneraliseerde inverse, 64
- geo-object, 15
- grenswaarde-ellips(oïde), 44
- Hannoverse methode, 73
- InSAR, 63
- inschakeling, 16
- meetruis, 19, 51
- MOVE3, 74
- niet-centraliteitsparameter, 44
- niet-stochastische waarnemingen, 57
- norm, 45, 53
- normaalmatrix, 17
- normeringsmodel, 20
- objectpunten, 54
- operationele definitie, 47
- Π -grootheid, 48
- P-grootheid, 49
- parameterruimte, 17
- precisie
 - relatieve, 47
- principal property (Tienstra), 52
- product, 16
- puntruus, 51, 74
- punttoets, 67
- rangdefect, 17
- referentiepunten, 54
- rek, 50
- risico, 16
- ruis, 19
 - meetruis, 51
 - puntruus, 51
 - systeemruis, 51
- S-transformatie, 63
- schrinking, 17, 63
- schrinkingstransformatie, 17, 63
- signaal, 19
- spanning, 50
- stabiliteitsanalyse, 51, 66
- strain, 50
- stress, 50
- SuRe-software, 76
- systeemruis, 19, 51, 64
- tijdreeksanalyse, 60
- toets
 - algemene modeltoets, 18
- tolerantie, 16, 21
- trend, 19, 67
- variogram, 19, 64
- verschuivingsvector, 74
- vervangingsmatrix, 53
- voorstel meettechniek en analysemodel, 22
- vorment, 49
- vormgrootheid, 49, 50
- waarnemingen
 - niet-stochastisch, 57
- waarnemingsruimte, 17