

$$\frac{3}{8} \times \frac{4}{7} =$$

$$1\frac{3}{4} \times 4\frac{5}{7} =$$

$$12\frac{2}{3} \times 1\frac{2}{19} =$$

$$14\frac{2}{3} \times 1\frac{6}{11} =$$

$$\frac{15}{21} \times \frac{3}{5} =$$

$$6 \times 3\frac{1}{8} =$$

$$11\frac{1}{5} \times 3\frac{1}{8} =$$

$$\frac{3}{9} \times \frac{12}{72} =$$

$$\frac{7}{13} \times \frac{26}{49} =$$

$$11\frac{3}{7} \times 4 =$$

$$9\frac{5}{6} \times 59 =$$

$$2\frac{6}{13} \times 3\frac{1}{4} =$$

$$\frac{9}{15} \times \frac{5}{7} =$$

$$5\frac{2}{5} \times 6\frac{1}{4} =$$

$$10\frac{5}{12} \times 3\frac{3}{5} =$$

$$2\frac{6}{15} \times 8\frac{1}{3} =$$

2013

Vermenigvuldigen met breuken in het basis- en voortgezet onderwijs

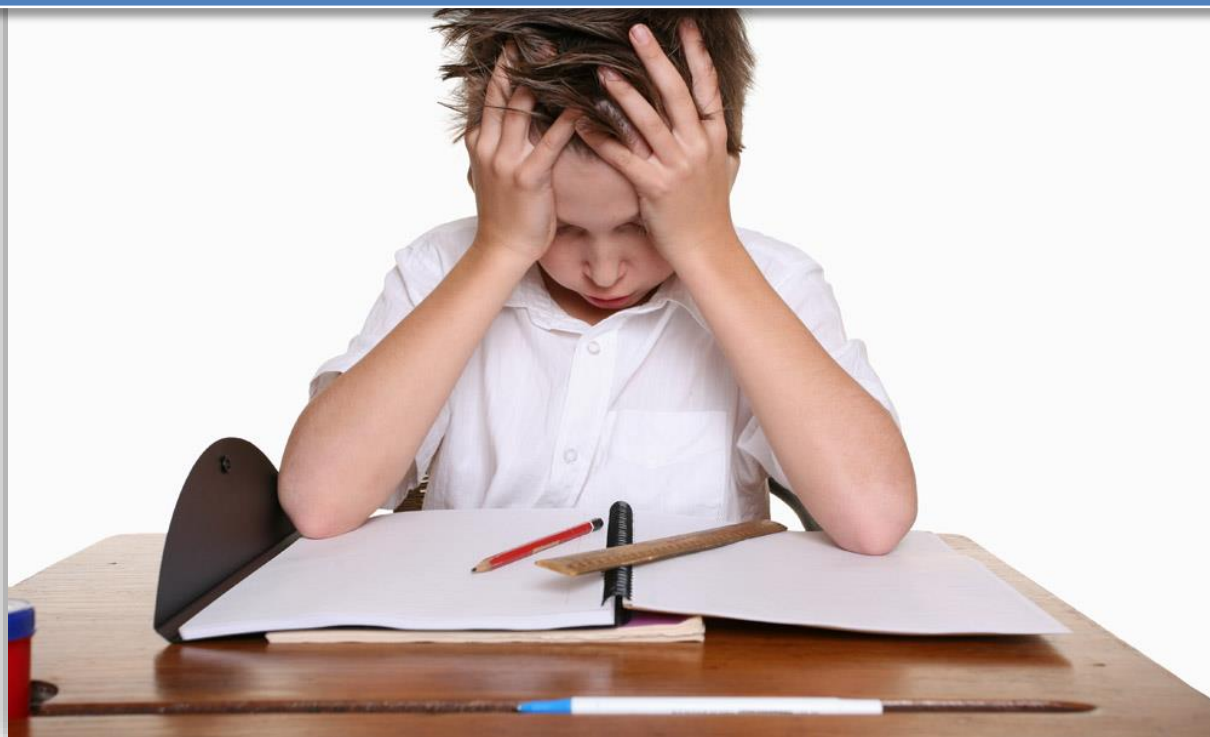
$$\frac{3}{8} \times \frac{4}{7} =$$

$$\frac{15}{21} \times \frac{3}{5} =$$

$$\frac{7}{13} \times \frac{26}{49} =$$

$$\frac{9}{15} \times \frac{5}{7} =$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{4}{7} =$$



$$\frac{15}{21} \times \frac{3}{5} =$$

$$6 \times 3\frac{1}{8} =$$

$$11\frac{1}{5} \times 3\frac{1}{8} =$$

$$\frac{3}{9} \times \frac{12}{72} =$$

$$\frac{7}{13} \times \frac{26}{49} =$$

$$11\frac{3}{7} \times 4 =$$

$$9\frac{5}{6} \times 59 =$$

$$2\frac{6}{13} \times 3\frac{1}{4} =$$

$$\frac{9}{15} \times \frac{5}{7} =$$

$$5\frac{2}{5} \times 6\frac{1}{4} =$$

$$10\frac{5}{12} \times 3\frac{3}{5} =$$

$$2\frac{6}{15} \times 8\frac{1}{3} =$$

Vermenigvuldigen met breuken in het basis- en voortgezet onderwijs

Onderzoek naar de overgang van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs bij het vermenigvuldigen met breuken op de Calvijnschool in Spakenburg

Marlies Duijst

100734

Afstudeerbegeleider: Henk Rietdijk

September 2013

Voorwoord

Het afstudeeronderzoek aan het eind van de pabo. Voor mij een mooi moment om een brug te slaan naar de opleiding die ik hierna wil gaan doen, namelijk docent wiskunde. Daarom heb ik ervoor gekozen om de overgang van de basisschool naar het voortgezet onderwijs op rekenwiskundegebied te onderzoeken. Voor mij persoonlijk een interessant onderwerp, maar ook actueel. Het is de laatste jaren meerdere keren in het nieuws geweest dat het rekenniveau achteruit gaat en dat leerlingen na het voortgezet onderwijs helemaal niet meer kunnen rekenen. Omdat de overgang naar het voortgezet onderwijs een vrij breed onderwerp is, heb ik het toegespitst op één onderdeel: vermenigvuldigen met breuken.

Tijdens het werken aan het onderzoek heb ik hulp van veel verschillende mensen gekregen. Familie, vrienden, medestudenten en collega's hebben mij waar ze konden geholpen en gesteund. Daar ben ik ze dankbaar voor. In het bijzonder wil ik mijn collega's van de Calvijnschool, Roelien Hagebeuk en Jacozien Hartog bedanken voor de gesprekken en de leestijd om de toets af te nemen. Ook de leerlingen van groep 8 wil bedanken voor het maken van de (veel te) lastige toets.

Ik wens u veel plezier bij het lezen van de resultaten van mijn onderzoek.

Marlies Duijst

Ede, September 2013

Inhoud

Voorwoord	2
Inhoudsopgave	3
Inleiding	4
Hoofdstuk 1. Aanpak basisonderwijs	5
Hoofdstuk 1.1 Opbouw curriculum	5
Hoofdstuk 1.2 Eindsituatie	6
<i>Hoofdstuk 1.2.1 Kerndoelen</i>	6
<i>Hoofdstuk 1.2.2 Landelijke referentieniveaus</i>	7
<i>Hoofdstuk 1.2.3 Onderzoek naar de eindsituatie</i>	8
Hoofdstuk 2 Didactiek basisonderwijs	11
Hoofdstuk 2.1 Drieslagmodel	11
Hoofdstuk 2.2 Realistisch rekenen	12
Hoofdstuk 2.3 Kritiek op realistisch rekenen	14
Hoofdstuk 2.4 Functioneel rekenen	15
Hoofdstuk 3 Situatie voortgezet onderwijs	17
Hoofdstuk 3.1 Aanpak en didactiek voortgezet onderwijs	17
<i>Hoofdstuk 3.1.1 Kerndoelen</i>	17
<i>Hoofdstuk 3.1.2 Didactiek</i>	18
<i>Hoofdstuk 3.1.3 Opbouw curriculum</i>	19
Hoofdstuk 3.2 Problemen bij vermenigvuldigen met breuken	20
Hoofdstuk 4 Conclusie theorieonderzoek	22
Hoofdstuk 4.1 Samenvatting	22
Hoofdstuk 4.2 Conclusie	23
Hoofdstuk 4.3 Visie	24
Hoofdstuk 5 Praktijkonderzoek	25
Hoofdstuk 5.1 Praktijkonderzoek naar eindsituatie groep 8	25
<i>Hoofdstuk 5.1.1 Toets</i>	25
<i>Hoofdstuk 5.1.2 Betrouwbaarheid en validiteit</i>	26
<i>Hoofdstuk 5.1.3 Beoordeling en resultaten</i>	26
Hoofdstuk 5.2 Methode-analyse wiskunde methodes	30
<i>Hoofdstuk 5.2.1 Analyse Getal & Ruimte vmbo bl</i>	30
<i>Hoofdstuk 5.2.2 Analyse Moderne Wiskunde vmbo kl/tl</i>	31
<i>Hoofdstuk 5.2.3 Analyse Moderne Wiskunde havo/vwo</i>	32
Hoofdstuk 6 Conclusie en adviezen	33
Bibliografie	36
Bijlage 1 Onderzoeksopzet	38
Bijlage 2 Toets	39

Inleiding

Voor u een onderzoek naar de overgang van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs op het gebied van vermenigvuldigen met breuken. Het is vaak in het nieuws dat het rekenonderwijs zwakker wordt. Kinderen zouden niet meer zo goed kunnen rekenen als vroeger. Heeft dit ook gevolgen voor het vak wiskunde op het voortgezet onderwijs? Een onderdeel van rekenen wat bij wiskunde ook erg belangrijk is, is het rekenen met breuken. In dit verslag leest u de resultaten van het onderzoek dat gedaan is naar één onderdeel van het breukrekenen: vermenigvuldigen met breuken.

Het onderzoek is uitgevoerd in groep 8 van de Calvijnschool in Spakenburg, bij leerlingen die op dat moment bijna afscheid namen van school en in september begonnen zijn in het voortgezet onderwijs. Er is onderzocht of voor deze groep leerlingen problemen zouden kunnen ontstaan bij het vermenigvuldigen met breuken.

Om de overgang te onderzoeken moet je weten wat de eindsituatie is van het basisonderwijs en wat er op het voortgezet onderwijs van de leerlingen verwacht wordt. In hoofdstuk 1 leest u wat de aanpak is van het basisonderwijs en tot welke eindsituatie dit zou moeten leiden. In hoofdstuk 2 leest u welke didactiek er op de basisschool wordt gebruikt en wat voor- en tegenstanders hiervan zeggen. Hoofdstuk 3 gaat over het voortgezet onderwijs. Hoe wordt daar gewerkt? Welke didactiek wordt daar gehanteerd? En hoofdstuk 4 geeft een conclusie van het literatuuronderzoek.

Op basis van het theorieonderzoek is het praktijkonderzoek ontwikkeld. Er is onderzoek gedaan naar de eindsituatie van de basisschool en een analyse gemaakt van de methodes die deze groep leerlingen in het voortgezet onderwijs gaan gebruiken. De resultaten hiervan zijn te lezen in hoofdstuk 5.

In het laatste hoofdstuk vindt u de conclusie van dit onderzoek.

1. Aanpak basisonderwijs

Om de aanpak van het vermenigvuldigen met breuken in het basisonderwijs te kunnen vergelijken met het voortgezet onderwijs, is het van belang om duidelijk in kaart te brengen welke aanpak in het basisonderwijs wordt gehanteerd. In dit hoofdstuk leest u hoe het curriculum is opgebouwd en wat de eindsituatie van de basisschool is, volgens de theorie en eerdere onderzoeken.

1.1 Opbouw curriculum

Om te kunnen vermenigvuldigen met breuken heeft de leerling al eerder verworven rekenvaardigheden nodig. Vanaf een bepaald aantal maanden onderwijs kan pas echt begonnen worden met het aanbieden van vermenigvuldigen met breuken. Dit aantal maanden kan weergegeven worden aan de hand van de didactische leeftijd (DL). De didactische leeftijd geeft weer hoeveel maanden onderwijs een leerling heeft gevolgd vanaf groep 3. Elk schooljaar telt 10 maanden onderwijs. Eind groep 4 is de didactische leeftijd bijvoorbeeld 20. Hieronder een schema (figuur 1.1) met de didactische leeftijd van groep 3 tot en met groep 8. (Melis G. , 1995)

Maand	Groep 3	Groep 4	Groep 5	Groep 6	Groep 7	Groep 8
September	1	11	21	31	41	51
Oktober	2	12	22	32	42	52
November	3	13	23	33	43	53
December	4	14	24	34	44	54
Januari	5	15	25	35	45	55
Februari	6	16	26	36	46	56
Maart	7	17	27	37	47	57
April	8	18	28	38	48	58
Mei	9	19	29	39	49	59
Juni	10	20	30	40	50	60

Figuur 1.1 Didactische Leeftijd (Melis, 1995)

Verschillende cruciale leermomenten zijn van belang. Een cruciaal leermoment is een inzicht in de (reken)ontwikkeling die een kind moet beheersen om een volgend inzicht te kunnen verwerven. Een kind moet om te beginnen goed kunnen vermenigvuldigen. Het streven is dat de leerlingen rond de didactische leeftijd van 30 de tafels hebben geautomatiseerd. Daarnaast is een cruciaal leermoment de kennismaking met het begrip breuken. Leerlingen moeten een breuk herkennen als deel van een geheel; $\frac{1}{2}$ is de helft van een hele. Deze kennismaking vindt plaats tussen de didactische leeftijd van

30-35. De volgende stap is dat de leerling een breuk gaat herkennen als een getal en dit getal op de getallenlijn kan plaatsen. Vanaf DL 35 wordt een begin gemaakt met het herhaald optellen van breuken, waarbij de uitkomst onder een hele blijft. Dit moeten de leerlingen eind groep 6 (DL 40) beheersen, zodat begin groep 7 een begin gemaakt kan worden met vermenigvuldigingen waar een breuk in voor komt.

Vanaf DL 41 leren de leerlingen een breuk te vermenigvuldigen met een heel getal. Midden groep 7 (DL 46) moeten de kinderen een som als $\frac{3}{4} \times 20$ kunnen oplossen. Dit soort sommen wordt de rest van de maanden onderwijs op de basisschool herhaald. Breuken vermenigvuldigen met breuken past bij een didactische leeftijd die hoger is dan 60. Wat wil zeggen dat dit op de basisschool nog niet beheerst hoeft te worden. (Bosch, Velde, & Verschuren, 2010) Hoewel er over de didactiek verschillende overtuigingen zijn (hoofdstuk 2), wordt deze opbouw bij zowel realistisch rekenen als functioneel rekenen gehanteerd. Dit is terug te vinden in verschillende methodes zoals: pluspunt (realistische rekenmethode) en reken zeker (functionele rekenmethode).

1.2 Eindsituatie

1.2.1 Kerndoelen

Er is door rijksoverheid vastgesteld welke kennis en vaardigheden op de basisschool aan bod moeten komen. Deze kennis en vaardigheden worden onderverdeeld in verschillende kerndoelen. Het kerndoel waar vermenigvuldigen met breuken onder valt is kerndoel 26.

Alle kerndoelen worden weer onderverdeeld in verschillende leerlijnen. In de leerlijn voor groep 7/8 wordt nog eens extra toegespitst wat er op het gebied van vermenigvuldigen met breuken aan bod moet komen. Het gaat daarbij om de volgende leerlijn:

Kerndoel 26

De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen. (SLO, Kerndoelen, 2006)

- Inzichtelijk rekenen met breuken:
 - vermenigvuldigen van breuken met hele getallen ($\frac{3}{4}$ van 20, $\frac{3}{4} \times 20$) en in betekenisvolle contexten met eenvoudige breuken;
 - veelvoud van een breuk berekenen ($20 \times \frac{3}{4}$). (SLO, Kerndoelen, 2006)

Er wordt vaak vanuit gegaan dat de kerndoelen ook het eindniveau van de basisschool aangeven. Dit is echter niet helemaal waar. De kerndoelen geven alleen weer wat er aan bod moet komen, niet of dit ook beheerst moet worden. Daarom heeft het nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

(SLO) in opdracht van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap landelijke referentie niveaus ontwikkeld. (SLO, Verschil tussen kerndoel en referentieniveau , 2010)

1.2.2 Landelijke referentieniveaus

De landelijke referentieniveaus zijn tot stand gekomen om de taal- en rekenprestaties van de basisschoolleerlingen te verbeteren. Het referentiekader omschrijft duidelijk wat een basisschool leerling moet kennen en kunnen. Aan het eind van het primair onderwijs moet het niveau van de leerlingen minimaal 1F(fundamenteel) zijn. Leerlingen die aan het eind van de basisschool niveau 1F hebben gaan meestal naar de basisberoepsgerichte leerweg en de kaderberoepsgerichte leerweg. Naast een fundamenteel niveau is er ook een streefniveau (1S). Leerlingen met niveau 1S gaan in de meeste gevallen naar de gemengde leerweg of theoretische leerweg in het vmbo of naar havo en vwo.

Het rekenen met breuken wordt genoemd binnen het domein getallen en het domein verhoudingen. Binnen het domein verhoudingen wordt er binnen betekenisvolle contexten gerekend met breuken. Door de context weten leerlingen vaak niet dat ze eigenlijk een vermenigvuldiging met een breuk uitrekenen, maar volgens de eisen van niveau 1F lijkt dit ook niet noodzakelijk. SLO omschrijft het volgende:

- Met veelvoorkomende breuken in betekenisvolle contexten kunnen rekenen en eventueel hierbij gelijknamig maken en de 'helen eruit halen';
- Deel van een hoeveelheid kunnen bepalen waar het gaat om elementaire breuken en eenvoudige ronde getallen (ook schattend/ongeveer rekenen). (Noteboom, 2009)

Maar dit zijn niet de enige doelen waar het rekenen met breuken benoemd wordt. In het domein getallen komt ook naar voren dat de leerlingen met breuken moeten kunnen rekenen:

- De leerling kan hoofdbewerkingen (+, -, x, :) met gehele en eenvoudige decimale getallen op papier uitvoeren, evenals bewerkingen met eenvoudige breuken.

Dit doel geeft weer dat een leerling dus met eenvoudige breuken moet kunnen vermenigvuldigen, zonder dat daarbij een betekenisvolle context aanwezig is. Hierbij wordt niet duidelijk aangegeven of de leerlingen ook eenvoudige breuken met elkaar moeten kunnen vermenigvuldigen. De leerlijnen bij kerndoel 26 geven aan dat er in de lessen aandacht moet zijn voor vermenigvuldigingen van breuken met hele getallen. (SLO, 1F - Rekenen, 2010)

Wat alles nog eens extra onduidelijk maakt is dat SLO niet overal hetzelfde weergeeft. Op de site staan bij de hoofdbewerkingen ook de breuken vermeld. In een bestand over referentieniveau 1F, van dezelfde site, worden de breuken niet meer benoemd. Het blijft dus onduidelijk wat volgens het referentieniveau de eindsituatie zou moeten zijn voor het vermenigvuldigen met breuken. Deze vraag heb ik bij SLO neergelegd, maar tot op heden hebben zij daar nog niet op gereageerd.

Bij het onderzoeken van het streefniveau (1S) wordt al niet veel meer duidelijk. Ook hier kom je hetzelfde probleem tegen. Op de site van SLO waar niveau 1S wordt uitgewerkt staat het volgende: De leerling:

- heeft de eigenschappen van getallen en bewerkingen (efficiënt rekenen) paraat en maakt hiervan gebruik bij het rekenen met grotere getallen, decimale getallen, moeilijkere breuken en gemengde getallen;
- kan standaardprocedures met inzicht gebruiken binnen situaties waarin gehele getallen, breuken en decimale getallen voorkomen;
- weet waarom er procedures zijn die altijd werken en weet waarom dat zo is. (SLO, 1S - Rekenen, 2010)

Volgens deze omschrijving kan een leerling met niveau 1S aan het eind van de basisschool vermenigvuldigen met breuken op een formeel niveau. In de uitgebreide uitwerking is dit, net zoals niveau 1F, nergens meer terug te vinden.

Gelukkig is er ook onderzoek gedaan naar de eindsituatie op de basisschool. Misschien geven de resultaten hiervan een duidelijker beeld van de eindsituatie dan de kerndoelen en referentiekaders.

1.2.3 Onderzoek naar de eindsituatie

In opdracht van de Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen is er vanaf 1986 onderzoek gedaan naar de eindsituatie van leerlingen op basisscholen in Nederland. Onder de naam Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) is er ook in 2004 een peiling gedaan naar de vaardigheden van de leerlingen aan het eind van groep 8. Het onderzoek dat is uitgevoerd op meer dan 120 geselecteerde scholen geeft een beeld van de gemiddelde eindsituatie op Nederlandse scholen. De resultaten op het met betrekking tot het onderwerp breuken zijn van belang voor dit onderzoek. De resultaten van dit onderzoek worden weergegeven met percentielaanduidingen. Het percentiel geeft aan hoeveel procent van de leerlingen een bepaalde vaardigheidsscore of lager hebben gehaald. Als percentiel 25 bij vaardigheidsscore 220 ligt heeft dus 25% die score of lager. 75% scoort in dat geval hoger dan 220. Verder worden de vaardigheidsscores verdeeld in drie niveaus: minimum (160-180), voldoende (220-250) en gevorderd (>290)

Het onderzoek heeft binnen het onderwerp breuken ook het onderdeel vermenigvuldigen met breuken getoetst. De percentiel-10 leerlingen, dat wil zeggen de 10 procent laagst scorende leerlingen, kunnen sommen waarin een breuk vermenigvuldiging moet worden niet uitrekenen. Zij hebben een vaardigheidsscore van 180. Ze scoren dus het minimum. De percentiel-25 leerlingen komen op een vaardigheidsscore van 220 en scoren bij een vermenigvuldiging matig. Uit dit onderzoek blijkt dat de gemiddelde leerlingen, de percentiel-50 leerlingen, binnen een herkenbare context een vermenigvuldiging met een breuk kunnen oplossen. In figuur 1.2 ziet u een voorbeeldvraag uit het onderzoek die een gemiddelde leerling op kan lossen. De gemiddelde leerling heeft een voldoende vaardigheidsscore rond de 250. De percentiel-75 leerlingen kunnen complexere vermenigvuldigingen oplossen, zoals $\frac{2}{3} \times 45$. Zij hebben een vaardigheidsscore van 285 en komen daarmee nog niet boven het gevorderde niveau. Ongeveer 10% van alle leerlingen konden alle opgaven met breuken goed maken en hebben een gevorderde vaardigheidsscore.

Uit het peilingsonderzoek blijkt dus dat de gemiddelde leerling aan het eind van de basisschool een eenvoudige vermenigvuldiging met een breuk in een herkenbare context kan oplossen. 25% kan dit maar matig en 10% komt er helemaal niet uit.

Het onderzoek geeft ook aan naar wel niveau voortgezet onderwijs de leerlingen zijn doorgestroomd. Van de laag scorende leerlingen op het gebied 'Breuken' gaan de meesten naar basisberoepsgerichte leerweg. De meeste leerlingen kunnen dan nog niet vermenigvuldigen met breuken.

Naar de kaderberoepsgerichte leerweg gaan leerlingen die matig kunnen vermenigvuldigen met breuken. Dit zijn de percentiel 25 leerlingen. De gemiddelde leerling gaat voornamelijk naar de gemengd/theoretische leerweg. Zij kunnen in een context vermenigvuldigen met breuken. De laatste groep gaat richting havo/vwo. Dit zijn de 25% hoogst scorende leerlingen. Deze leerlingen kunnen breuken vermenigvuldigen met een heel getal op formeel niveau.

In het onderzoek blijkt ook dat de leerlingen op het gebied breukrekenen in 2004 lager hebben gescoord dan in 1997. (PPON, 2005)



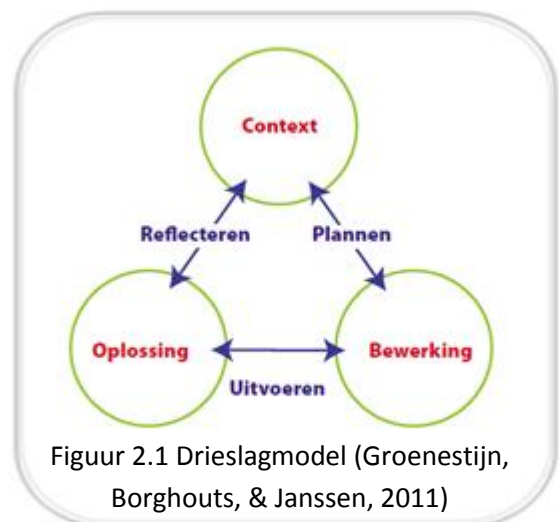
In de kerndoelen is dus aangegeven dat het vermenigvuldigen met breuken op de basisschool aan bod moet komen. Dit wordt aangeboden binnen een betekenisvolle context. De referentiekaders geven aan dat leerlingen aan het eind van de basisschool moeten kunnen vermenigvuldigen met breuken om niveau 1F te hebben. Dit niveau is nodig voor een goede overgang naar het voortgezet onderwijs. Of de leerlingen met niveau 1F het vermenigvuldigen ook zonder context moeten beheersen is onduidelijk. Uit onderzoek blijkt dat een gemiddelde leerling kan vermenigvuldigen in een context. Zonder context kan een beperkt aantal leerlingen dit.

2. Didactiek Basisonderwijs

In hoofdstuk 1 is uitgebreid beschreven wat er aangeboden moet worden en wat de eindresultaten zouden moeten zijn. In dit hoofdstuk kunt u lezen welke didactiek er kan worden gehanteerd bij het aanbieden van vermenigvuldigingen met breuken. Om de overgang naar het voortgezet onderwijs te onderzoeken is het ook van belang om te weten welke didactiek is gebruikt bij het aanbieden van de leerstof. Welke didactiek wordt er gebruikt op de basisschool?

2.1 Drieslagmodel

Het doel van rekenwiskunde-onderwijs is functionele gecijferdheid. Dit houdt in dat de leerlingen rekenvaardigheden in alledaagse situaties kun toepassen. Om tot juiste conclusies te komen, is het van belang dat leerlingen op een correcte manier leren om probleemoplossend te handelen. Het proces van probleemoplossend handelen kan worden weergegeven aan de hand van het drieslagmodel in figuur 2.1. Uit de context wordt verschillende informatie gehaald. Daarna ga je plannen wat er uitgerekend moet worden. Je kiest een bewerking om bij de juiste oplossing te komen. Vervolgens voer je de bewerking uit en heb je een oplossing. Het antwoord reflecteer je op de context om te controleren of dit klopt bij de context. In de praktijk kunnen deze verschillende stappen heel snel in elkaar overvloeien. (Groenestijn, Borghouts, & Janssen, 2011)



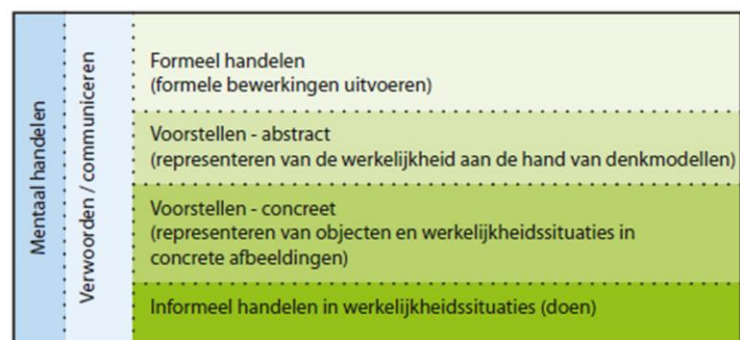
Figuur 2.1 Drieslagmodel (Groenestijn, Borghouts, & Janssen, 2011)

Om probleemoplossend te kunnen handelen is het dus van belang dat je voldoende rekenvaardigheden hebt. Je moet de juiste bewerking kunnen kiezen en deze bewerking juist kunnen toepassen. Realistisch rekenen is een veelgebruikte didactiek die hier invulling aan geeft.

2.2 Realistisch rekenen

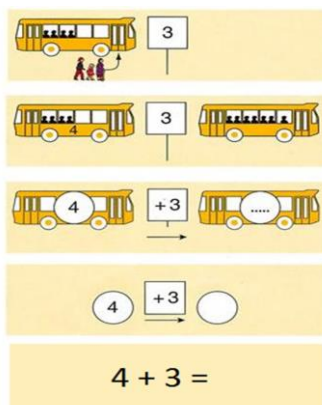
In de jaren 90 is in Nederland het realistisch rekenen ingevoerd. De grondlegger van deze didactiek is Hans Freudenthal. Een van de grondprincipes van deze methodes is dat inzicht belangrijker is dan inoefening. Eerst begrijpen en dan pas oefenen. Bij deze rekendidactiek is de inbreng van de leerlingen erg belangrijk. Er mag gewerkt worden met verschillende oplossingsstrategieën. Er is ruimte voor interactie. (Gravemeijer, 1994)

Daarnaast is deze didactiek gebaseerd op realistische situaties. Volgens deze didactiek leren leerlingen volgens het handelingsmodel in figuur 2.2. Op het eerste handelingsniveau leren de kinderen door op een informele manier iets te doen of te beleven. Het tweede niveau houdt in dat kinderen leren door te praten over concrete situaties met behulp van afbeeldingen. Op het derde niveau leren de leerlingen op een meer abstract niveau te redeneren aan de hand van een schematische voorstelling van



Figuur 2.2 Handelingsmodel (Groenestijn, Borghouts, & Janssen, 2011)

de werkelijkheid. Het hoogste niveau houdt in dat de kinderen redeneren op basis van tekst en getallen. Dit is het formele handelingsniveau. (Groenestijn, Borghouts, & Janssen, 2011) In figuur 2.3



Figuur 2.3 Voorbeeld handelingsmodel (2011)

ziet u een voorbeeld van de opbouw van het handelingsmodel. Er wordt vanuit gegaan dat leerlingen zelf ontdekkend leren. Door concrete voorbeelden moeten ze zelf een mathematisch concept kunnen ontwikkelen. (Gravemeijer, 1994) Het is echter niet vanzelfsprekend dat leerlingen de overgang naar een volgende fase vanzelf maken. De leerkracht heeft hier echter een cruciale rol. Hij legt de verbanden tussen de verschillende niveaus. Door interactie en het laten verwoorden van handelingen die de leerling doet, stuurt de leerkracht het mentale proces aan

en begeleidt hij de leerling van het ene naar het andere niveau. (Groenestijn, Borghouts, & Janssen, 2011)

De uitgangspunten van realistisch rekenen zijn verwerkt in veel rekenmethodes, zoals Pluspunt, Wereld in getallen en Wizwijs. Dit zijn de meest gebruikte rekenmethodes in het huidige basisonderwijs.

Het vermenigvuldigen met breuken begint in een herkenbare context voor de leerlingen. De eerste situaties waarin een breuk vermenigvuldiging

moet worden, wordt de breuk met een heel getal

vermenigvuldigd. Zoals de eerste kennismaking met vermenigvuldigen kan de leerling deze som ook

oplossen door herhaalde optelling. Bij deze situaties wordt een heel getal met een breuk

vermenigvuldiging. Voor de leerlingen is dit eenvoudiger dan wanneer een breuk wordt

Je hebt $\frac{3}{4}$ meter stof nodig. De stof kost € 8,00. Hoeveel geld moet je betalen? ($\frac{3}{4} \times 8$)

Drie mensen eten $\frac{3}{4}$ pizza. Hoeveel pizza's heb je nodig? ($\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$)

vermenigvuldigd met een heel getal. In de context herkennen

leerlingen vaak de vermenigvuldiging niet. Leerlingen zouden de verwisselingschap kunnen toepassen ($3 \times 4 = 4 \times 3$, dus

de verwisselingschap kunnen toepassen ($3 \times 4 = 4 \times 3$, dus

$\frac{3}{4} \times 8 = 8 \times \frac{3}{4}$), maar dan moeten ze dus wel de

vermenigvuldiging uit de context zien te halen. Maar omdat er volgens de principes van realistisch

rekenen wordt gewerkt, is er aandacht voor verschillende oplossingsstrategieën. Het is dus ook niet

noodzakelijk dat de leerlingen een vermenigvuldiging herkennen. Het is belangrijker dat ze met een

eigen gekozen strategie tot het goede antwoord komen. Het is dus hier van belang dat de leerkracht

hier ondersteunt om de vermenigvuldiging te herkennen en een strategie te ontwikkelen die

toepasbaar is in verschillende situaties.

Na het rekenen in de context wordt de stap gemaakt naar een model. Bij vermenigvuldigen met

breuken is het model gebaseerd op herhaaldelijk optellen. De sommen worden uitgerekend met

behulp van een getallenlijn of een

strook. In figuur 2.4 een voorbeeld van

de getallenlijn. Deze methode werkt

voor niet al te grote getallen. Bij grotere

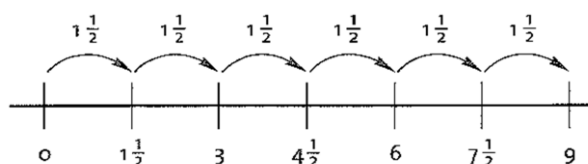
getallen wordt het erg veel werk voor de

leerling om de som met een model uit te

rekenen. Voor grotere getallen zou de

$$6 \times 1\frac{1}{2} =$$

Je kunt dit doen met de getallenlijn:



Figuur 2.4 Model – getallenlijn (Pluspunt)

stap naar formeel vermenigvuldigen met breuken moeten worden gemaakt. (Tal-team, 2005)

Aan het vermenigvuldigen op formeel niveau wordt in de meeste methodes maar weinig aandacht gegeven. Verschillende handleidingen van o.a. pluspunt en wereld in getallen geven voor de instructie aan steeds weer terug te grijpen op de context. Voor het vermenigvuldigen van een breuk met een heel getal wordt in veel methodes de volgende strategie aangeboden: eerst delen door de noemer en vervolgens vermenigvuldigen met de teller. $\frac{4}{5} \times 20$ wordt in dat geval $20 : 5 = 4$ en $4 \times 4 = 16$. Een breuk met een breuk vermenigvuldigen komt wel voor, maar in geen enkele handleiding is te vinden hoe dit moet zonder een strook of getallenlijn te gebruiken.

2.3 Kritiek op realistisch rekenen

Op de basisprincipes van het realistisch rekenen is veel kritiek. Het rekenniveau van de basisschoolleerlingen zou na de invoer van de nieuwe methodes sterk achteruit zijn gegaan. Jan van de Craats is een wiskundige die in 2007 aandacht vroeg voor de problematiek in het rekenonderwijs. In zijn artikel *‘Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen’* legt hij uit wat volgens hem de grootste problemen zijn bij het realistische rekenen. Als eerste noemt hij dat eerst begrijpen en daarna pas oefenen niet altijd het beste is. Hij legt uit dat je juist door oefening steeds meer begrip krijgt. Volgens van de Craats wordt dit duidelijk in het rekenonderwijs dat ‘opa en oma’ hebben gevolgd. Daarnaast heeft hij kritiek op het hanteren van verschillende oplossingsstrategieën. Door allerlei verschillende strategieën wordt er geen basisrecept aangeleerd om rekenkundige problemen op te lossen. Ook voor vermenigvuldigen met breuken zou er volgens Craats een standaardrecept aangeleerd moeten worden. De verschillende strategieën die nu aangeboden worden werken vaak maar voor een bepaald aantal sommen. Vooral zwakke leerlingen zouden problemen krijgen om de juiste strategie bij het juiste type som te vinden. Als het om vermenigvuldigen met breuken gaat, krijgen leerlingen vooral problemen met sommen waarin breuken voorkomen waarbij niet zo snel een handige context te bedenken is. De bedenkers van realistisch rekenen wilden uitgaan van begrip en op een handige manier rekenen, zonder aangeleerde trucjes. Van de Craats zegt dat juist het tegenovergestelde gebeurt: de leerlingen leren tientallen handigheidjes en weten uiteindelijk niet meer welk ‘trucje’ bij welk soort sommen hoort. (Craats, 2007)

Naast van de Craats hebben verschillende andere hoogleraren kritiek op het realistisch rekenonderwijs. Er is een stichting in het leven geroepen om het rekenonderwijs te verbeteren door functioneel rekenen in plaats van realistisch rekenen.

2.4 Functioneel rekenen

Functioneel rekenen is gebaseerd op traditioneel rekenen en het antwoord van critici op realistisch rekenen. *Reken zeker* is een methode voor de basisschool die ontwikkeld is op basis van functioneel rekenen. Anders dan methodes gebaseerd op realistisch rekenen geeft deze methode een algoritme voor het vermenigvuldigen met breuken. Dit is de enige methode (op dit moment) waarbij leerlingen leren wegstrepen bij het uitrekenen van een vermenigvuldiging en vervolgens de som uitrekenen door middel van teller x teller en noemer keer noemer (zie figuur 2.2, volgende pagina)

Natuurlijk hebben de voorstanders van realistisch rekenen hier ook een reactie op. Zij gaan ervan uit dat leerlingen hun eigen kennis construeren. Het inoefenen van tafels of andere rekenbewerkingen wordt door hen gezien als een activiteit die onnodig is omdat kinderen een

$$1\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{5} = \frac{5}{4} \times \frac{16}{5} = \frac{4}{1} = 4$$

Figuur 2.2 Opgave uit 'Reken Zeker' (2010)

rekenmachine kunnen gebruiken. Ook vinden voorstanders van realistisch rekenen het stampen van tafels en andere bewerkingen niet inspirerend en creatief. (Braams & Milikowski, 2008)

De voorkeur voor een bepaalde didactiek hangt nauw samen met het einddoel wat voor ogen is. Als je als einddoel hebt dat de leerlingen in een betekenisvolle situatie moeten kunnen vermenigvuldigen met breuken, dan kun je dit realiseren met de uitgangspunten van realistisch rekenen. Met als kritiek dat verschillende strategieën voor zwakkere leerlingen op het gebied van rekenen verwarrend zouden kunnen zijn.

Stel je als einddoel dat de leerling op een formeel niveau met breuken moet kunnen vermenigvuldigen dan schiet het realistisch rekenen te kort. Voor formele sommen is vaak geen realistische context meer te bedenken en methodes gebaseerd op realistisch rekenen bieden geen duidelijk algoritme voor het vermenigvuldigen van breuken. Een methode die gebaseerd is op functioneel rekenen geeft wel een algoritme. Kritiek bij deze methode is dat de leerling niet goed weet wat hij/zij doet, waardoor er niet vanuit het begrip van de leerling gerekend wordt.

Gelet op het drieslag model om functionele gecijferdheid te bereiken is realistisch rekenen een goede basis. Binnen realistisch rekenen kunnen de leerlingen vaardigheden met betrekking tot vermenigvuldigen met breuken functioneel gebruiken. Omdat er veel aandacht is voor het begrip

weten de leerlingen ook waarom ze de bewerking toepassen. Zo hebben ze de juiste kennis en vaardigheden paraat om in de praktijk probleemoplossend te kunnen handelen. Het functioneel rekenen schiet hier tekort. De leerlingen hebben kennis paraat, maar weten niet waarom ze een bepaalde bewerking moeten toepassen. De vraag is of zij deze kennis functioneel kunnen gebruiken in de praktijk.

3. Situatie voortgezet onderwijs

Nu we goed weten hoe de situatie in het basisonderwijs is, is het ook belangrijk om te onderzoeken hoe er in het voortgezet onderwijs wordt omgegaan met vermenigvuldigen met breuken. Zo kan uiteindelijk de conclusie worden getrokken dat het voortgezet onderwijs wel of niet goed aansluit bij de eindsituatie van het basisonderwijs.

3.1 Aanpak en didactiek voortgezet onderwijs

3.1.1 Kerndoelen

Voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs zijn er kerndoelen ontwikkeld. Het doel van deze kerndoelen wordt in de publicatie van Rijksoverheid als volgt weergegeven: *“Er zijn negen kerndoelen die betrekking hebben op rekenen en wiskunde. Er wordt ruimte gelaten deze uit te werken op basis van verschillende opvattingen en leerstijlen. Uiteindelijk gaat het bij deze kerndoelen in de eerste plaats om de gebruiksmogelijkheden van (elementaire) rekenvaardigheden en van wiskunde buiten en binnen het onderwijsprogramma, zowel in de onderbouw als in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs (inclusief het derde leerjaar havo / vwo). Systematische aandacht in het onderwijsprogramma voor (elementaire) rekenvaardigheden is van belang om doorlopende leerlijnen te realiseren van primair onderwijs, via het voortgezet onderwijs, naar mbo en hoger onderwijs.”* (Kerndoelen onderbouw voortgezet onderwijs, 2010)

De kerndoelen zijn dus ontwikkeld voor het verbeteren van de doorlopende leerlijn van onder andere het primair onderwijs naar het voortgezet onderwijs. Het kerndoel waar vermenigvuldigen met breuken onder valt is kerndoel 22. Belangrijk is dat vermeld wordt dat er in praktische en zinvolle situaties mee gewerkt moet kunnen worden. Dit sluit goed aan bij de eindsituatie in het basisonderwijs, omdat daar in de meeste gevallen met een betekenisvolle context wordt gewerkt. Voor de leerlingen is het nieuw om ook met negatieve getallen te werken. Dit hebben ze op de basisschool nog niet gehad in combinatie met breuken.

Kerndoel 22

De leerling leert de structuur en de samenhang te doorzien van positieve en negatieve getallen, decimale getallen, **breuken**, procenten en verhoudingen, en leert ermee te werken in zinvolle en praktische situaties. (Kerndoelen onderbouw voortgezet onderwijs, 2010)

3.1.2 Didactiek

De didactiek die je tegenkomt in de wiskundeboeken is verschillend per niveau en per methode. Zo komt in de methode Moderne Wiskunde voor mavo/havo/vwo 1 het vermenigvuldigen met breuken alleen voor bij het hoofdstuk over verhoudingen. De vermenigvuldiging wordt omschreven als ‘een deel van het geheel’. De opgaven gaan over een heel getal vermenigvuldigen met een breuk, maar lijken meer op delingen. $\frac{3}{4}$ deel van 600 wordt uitgewerkt als $600 : 4 \times 3$. Aan het eind van het boek kom je nog eens zulke opgaven tegen die met de rekenmachine op dezelfde manier uitgerekend moeten worden. Bij al deze opgaven wordt er gewerkt met een context. (Wolters-Noordhoff, 1997)

In een andere methode voor havo/vwo 1 komt je het vermenigvuldigen met breuken uitgebreider tegen. Als eerst staat er een opdracht met een herkenbare context waarin het vermenigvuldigen met breuken naar voren komt, de welbekende chocoladereep in dit geval. Daarna volgt gelijk een blokje theorie waarin, met grote sprongen, uitgelegd wordt dat je breuken kan vermenigvuldigen door teller maal teller en noemer maal noemer. Dit wordt in sommige methodes als volgt weergegeven: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Er is minder aandacht voor de context en uitleg waarom deze regel geldt is al helemaal niet terug te vinden. Met de opdrachten die volgen na de theorie oefenen de

Theorie C Breuken vermenigvuldigen

In opgave 33 heb je gezien $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

En zo is $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ en $\frac{5}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{10}{63}$.

Je ziet: bij het vermenigvuldigen van breuken moet je de tellers vermenigvuldigen en de noemers vermenigvuldigen.

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Werkschema: het vermenigvuldigen van breuken

- 1 Breng helen binnen de breuken.
- 2 Bereken $\frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$.
- 3 Vereenvoudig de uitkomst en haal de helen eruit.

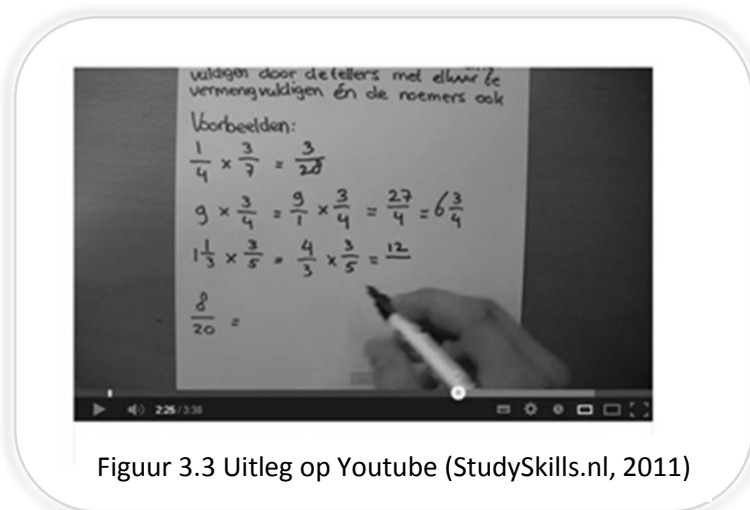
Figuur 3.2 Werkschema ((Getal & Ruimte, 2011)

leerlingen het juist toepassen van dit algoritme. Hierbij kunnen de leerlingen gebruik maken van een werkschema (figuur 3.2) Na een aantal formele opgaven volgen een aantal verhaaltjes sommen. Eigenlijk wordt hier dus precies omgekeerd gehandeld ten opzichte van realistisch rekenen, waarbij vanuit het begrip naar een formele som toewerkt. (EPN, 2011) Voor een zwakke leerling zal dit misschien fijn zijn, omdat er zelf niet

echt nagedacht hoeft te worden en er gewoon een trucje uit het hoofd geleerd kan worden. Maar uiteindelijk zal een zwakke leerling het nog moeilijker krijgen, omdat ze voor de verschillende onderdelen binnen wiskunde veel moeten onthouden, zonder enig begrip.

In elke methode wordt aandacht gegeven aan het juist gebruikmaken van de rekenmachine, zodat vermenigvuldigingen met breuken op een juiste manier uitgerekend kunnen worden. In een enkele methode komt je nog tegen dat er kruislings tegen elkaar weggestreept kan worden. Dit kom je ook tegen bij het functioneel rekenen (hoofdstuk 2.3).

Verschillende wiskunde docenten geven via internet instructies over het vermenigvuldigen met breuken. Hierin is duidelijk te zien dat ze zonder context op formeel niveau de berekeningen laten zien. Dit sluit niet aan bij de beginsituatie van de leerlingen, want zij zijn nog niet toe aan formeel vermenigvuldigen met breuken, zoals in hoofdstuk 2 beschreven. In figuur 3.3 zie je een screenshot van een uitleg via www.youtube.com. Opvallend zijn de reacties op deze instructie. Leerlingen lijken de eenvoudige uitleg, zonder contexten en andere verhalen erg te waarderen. Zo geeft een jongen de reactie: “Hee-hee eindelijk iemand die het wel simpel uitlegt.. Bedankt!”.



Figuur 3.3 Uitleg op Youtube (StudySkills.nl, 2011)

3.1.3 Opbouw curriculum

Afhankelijk van de methode en het niveau wordt het vermenigvuldigen met breuken op een bepaalde manier opgebouwd. Wat in elke methode opvalt is dat het vermenigvuldigen met breuken maar zeer beperkt de aandacht krijgt, ongeacht welk niveau de leerling doet. In sommige methodes valt het zelfs onder de extra opgaven, waar in de praktijk alleen uitblinkers aan toe komen, die vaak geen zin hebben om ook nog eens extra opgaven te maken.

Leerlingen die VMBO doen moeten uiteindelijk op het examen met eenvoudige breuken kunnen vermenigvuldigen met breuken. Iets wat ze volgens het eerder genoemde onderzoek (hoofdstuk 1) nog niet of matig beheersen. In de boeken voor dit niveau komt je het vermenigvuldigen met breuken alleen tegen binnen een context, vaak niet eens genoteerd als een vermenigvuldiging met een breuk. Dit sluit het meest aan bij wat er op de basisschool wordt aangeboden.

De leerlingen die doorstromen naar havo/vwo komen vaker in aanraking met breuken en het vermenigvuldigen daarvan. Er is niet echt een duidelijke opbouw. Eén paragraaf van een hoofdstuk wordt besteed aan vermenigvuldigen met breuken. Daar wordt het algoritme geleerd en het gebruik van de rekenmachine wordt behandeld. Voor deze leerlingen is het vermenigvuldigen met breuken een belangrijker onderdeel, omdat ze dit bij algebra nog veel tegen zullen komen. Het formeel

vermenigvuldigen met breuken is een cruciaal leermoment voor het oplossen van algebraïsche vergelijkingen.

3.2 Problemen bij vermenigvuldigen met breuken

De didactiek lijkt goed. Geen gezeur met passende voorbeelden, maar gewoon op een formele manier vermenigvuldigen. Voor de leerlingen wel zo duidelijk. En zolang je goed weet hoe je de sommen moet invoeren op je rekenmachine lijken er geen problemen.

Voor de meeste leerlingen op het VMBO is dit inderdaad het geval. De stof die in de les behandeld wordt sluit aan bij de stof op de basisschool. Maar voor leerlingen die havo/vwo gaan doen wordt het lastiger. Wiskundedocenten lopen tegen verschillende problemen aan. Als eerste komen ze erachter dat er van de behandelde stof op de basisschool maar weinig is blijven hangen. Leerlingen geven aan dat de stof ze niet bekend voorkomt. Dit komt voornamelijk doordat de leerlingen binnen de context vaak niet bewust vermenigvuldigen met breuken hebben gemaakt. Het lijkt dus helemaal nieuw voor ze. Daarna worden de problemen eigenlijk alleen maar groter. Door het gebruik van de rekenmachines kunnen de leerlingen vermenigvuldigen met breuken prima uitrekenen. Maar in de hogere klassen komen de breuken terug bij algebra. Dan moeten de leerlingen op een formeel niveau kunnen rekenen met breuken, omdat de formules met letters niet zo ingevoerd kunnen worden op de rekenmachine. Volgens betogers zou dit probleem al in de onderbouw van het voortgezet onderwijs aangepakt moeten worden. (Dekker & Kindt, 2006)

Wat ook lastig is voor de docenten, is dat ze leerlingen met een verschillende achtergrond in de klas krijgen. Op basisscholen wordt verschillend omgegaan met rekenen-wiskunde. In hoofdstuk 1 wordt al duidelijk dat de eindsituatie niet helemaal duidelijk is en dus ook per school wat kan verschillen. In hoofdstuk twee komt daar ook nog verschil in didactiek bij. Dit zorgt ervoor dat de docent op het voortgezet onderwijs een erg gedifferentieerde klas krijgt, waarbij het moeilijk is om aan te sluiten bij de juiste beginsituatie.

Wat duidelijk wordt in dit hoofdstuk is dat vermenigvuldigen met breuken niet voor elk niveau evenveel van belang is. Voor VMBO-leerlingen is het een onderdeel, maar niet noodzakelijk voor het behalen van het VMBO-diploma. Voor havo/vwo is het vermenigvuldigen met breuken van belang voor bij algebra. Er wordt voornamelijk op een formeel niveau vermenigvuldigd, waarbij gebruik gemaakt mag worden van de rekenmachine.

In het voortgezet onderwijs lopen leerlingen vast bij het vermenigvuldigen door de grote sprong van de context gebonden situaties in het basisonderwijs naar het formele vermenigvuldigen in het voortgezet onderwijs. Ook lopen ze vast in hogere klassen als ze moeten rekenen met breuken waarin letters voorkomen. Dit laatste probleem komt omdat de leerlingen niet goed op een formeel niveau kunnen vermenigvuldigen met breuken.

4. Conclusie theorieonderzoek

Met alle feiten op een rij kan er een conclusie getrokken worden over de overgang van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs, op het gebied vermenigvuldigen met breuken.

4.1 Samenvatting theoriedeel

Het rekenonderwijs heeft een logische opbouw, waarbij een aantal cruciale leermomenten nodig zijn voordat een leerling kan gaan vermenigvuldigen met breuken. In groep 7 en 8 van de basisschool komen de leerlingen in aanraking met vermenigvuldigingen met één of twee breuken.

De eindsituatie is niet helemaal duidelijk. In ieder geval moeten de leerlingen binnen een betekenisvolle context kunnen vermenigvuldigen met breuken. Of ze met eenvoudige getallen moeten kunnen vermenigvuldigen is niet helemaal duidelijk.

De leerlingen leren vermenigvuldigen binnen een herkenbare context. De meeste scholen gebruiken methodes gebaseerd op realistisch rekenen. Een kenmerk hiervan is dat leerlingen verschillende oplossingsstrategieën mogen gebruiken, omdat ze moeten kunnen beredeneren wat ze doen. Zo kan bijvoorbeeld een vermenigvuldiging met een breuk ook uitgerekend worden als een vermenigvuldiging met een kommagetal. Critici vinden dat het begrip overgewaardeerd wordt en de algoritmes teveel naar de achtergrond verdwijnen. Zij hebben als tegenhanger het functioneel rekenen ontwikkeld. Dit wordt nog niet op veel scholen gehanteerd. De meeste leerlingen leren dus vermenigvuldigen met breuken vanuit de principes van het realistisch rekenen.

Op het voortgezet onderwijs leren leerlingen het algoritme teller maal teller en noemer maal noemer. Leerlingen op het VMBO moeten uiteindelijk op hun examen op een eenvoudige vermenigvuldiging met breuken uit kunnen rekenen, eventueel met behulp van de rekenmachine. Leerlingen die havo of vwo gaan doen hebben formeel vermenigvuldigen met breuken nodig bij algebra. De leerlingen leren hoe ze vermenigvuldigen op een rekenmachine kunnen uitrekenen. Problemen ontstaan doordat de leerlingen breuken met letters niet meer kunnen invoeren op de rekenmachine. Ze kunnen vaak niet voldoende op formeel niveau vermenigvuldigen. Ook merken docenten dat leerlingen de stof van de basisschool binnen de context niet goed kunnen koppelen aan het rekenen op een formeel niveau.

4.2 Conclusie

In de theorie wordt duidelijk dat er het één en ander niet goed loopt. De onderzoeksvraag was of de aanpak in het basisonderwijs aansluit bij de aanpak in het voortgezet onderwijs. De theorie geeft vrij duidelijk weer dat niet voor alle niveaus een goede aansluiting is.

Allereerst is niet eens goed duidelijk wat de eindsituatie van het basisonderwijs is. De kerndoelen geven aan wat er aan bod moet zijn geweest en het referentieniveau is niet helemaal duidelijk wat er nu precies verwacht mag worden van de leerlingen. De Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau laat zien dat er veel verschil is tussen de leerlingen. Daarom geef ik per niveau van voortgezet onderwijs antwoord op de vraag of er aansluiting is.

Leerlingen die doorstromen naar *VMBO beroepsgerichte leerweg en kadergerichte leerweg* kunnen aan het eind van de basisschool nog niet vermenigvuldigen met breuken. Aan het eind van het voortgezet onderwijs moeten ze dit kunnen. Hier wordt in de methodes aandacht aan besteedt die aansluit bij de aanpak op de basisschool. Op een formeel niveau vermenigvuldigen met breuken is niet echt van belang, omdat ze opgaven met een rekenmachine uit kunnen rekenen en verder het algoritme niet nodig zullen hebben.

Voor leerlingen op *VMBO gemengde leerweg en theoretische leerweg* geldt eigenlijk hetzelfde als voor de beroeps- en kadergerichte leerweg. Zij zullen iets vaker in aanraking komen met vermenigvuldigen met breuken, maar zullen dit niet nodig hebben in het verdere wiskundeonderwijs. De didactisch niveau zouden er problemen kunnen ontstaan doordat er minder aandacht is voor de context en er meer aandacht is voor het algoritme en de rekenmachine

Op *de havo en het vwo* zijn de grootste problemen. Uit het onderzoek blijkt dat de leerlingen op een formeel niveau een breuk met een heel getal kunnen vermenigvuldigen. In het voortgezet onderwijs wordt de sprong gemaakt naar een algoritme om breuken met elkaar te kunnen vermenigvuldigen. Dit kunnen de leerlingen niet koppelen aan de eerdere opgedane kennis. Als noodoplossing maken ze de opgaven met behulp van een rekenmachine. Dit gaat goed, totdat ze met breuken met letters in aanraking komen.

Onderzoekers die kritiek hebben op het realistisch rekenen menen door functioneel rekenen dit soort problemen al op de basisschool voor te zijn. Andere betogers geven aan dat dit probleem opgelost kan worden door in de onderbouw van het voortgezet onderwijs al aandacht te geven aan letterbreuken.

Uit het theorieonderzoek wordt dus duidelijk dat er, zeker voor havo- en vwo-leerlingen, problemen zijn met de overgang van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs als het om vermenigvuldigen met breuken gaat. De vraag is alleen hoe dit opgelost dient te worden. Door meer tijd voor dit onderwerp vrij te maken op de basisschool of het voortgezet onderwijs of door de didactiek op de basisschool te veranderen.

4.3 Visie

Voor ik aan dit onderzoek begon was ik altijd erg overtuigd van de principes van het realistisch rekenen. Ik vond begrip erg belangrijk en ook de ruimte voor verschillende oplossingsstrategieën sprak mij erg aan. Door het doen van dit onderzoek ben ik gaan twijfelen of deze didactiek wel zo juist is. Wat mij verbaast is dat er volgens van de Craats geen wetenschappelijk bewijs was voordat deze didactiek werd ingevoerd. Nu blijkt het niveau achteruit te gaan volgens het PPON onderzoek en de didactiek kan hier een oorzaak van zijn. Ik vind dat door deze didactiek er te angstig omgegaan wordt met vaste rekenregels. Met betrekking tot mijn onderzoek vind ik dat er aan het eind van de basisschool meer ruimte gemaakt moet worden voor het algoritme teller maal teller en noemer maal noemer. Met name voor leerlingen die doorstromen naar havo en vwo is het toch wel van belang dat ze dit kennen en kunnen toepassen. Wat ik in de theorie vooral zie is dat het lijkt alsof leerkrachten op de basisschool bang zijn of onvoldoende vaardigheden hebben om de laatste stap naar het formele rekenen te maken. Misschien aangemoedigd door de referentieniveaus en kerndoelen die vermelden dat dit ook niet aan bod hoeft te komen. De belangrijke taak van de leerkracht om de leerlingen verder te helpen binnen het handelingsmodel wordt onderschat. Ik vind dat de problemen die er volgens de theorie zijn het beste al op de basisschool aangepakt kunnen worden. De leerlingen werken daar met modellen en zitten dan nog goed in de stof. De stap naar formeel rekenen is dan logisch. Om deze stap pas een jaar later te maken lijkt mij onlogisch, omdat dan veel weer is weggezakt. Ik vind ook dat docenten in het voortgezet onderwijs beter op de hoogte moeten zijn van de beginsituatie van de basisschoolleerlingen en beseffen dat opeens formeel vermenigvuldigen met breuken niet aansluit bij het eindniveau op de basisschool.

5. Praktijkonderzoek

Om te onderzoeken of er voor de leerlingen van groep 8 van de Calvijnsschool een goede aansluiting is met het voortgezet onderwijs, moet de eindsituatie in kaart gebracht worden. De vraag is of deze eindsituatie klopt bij wat de theorie weergeeft. Deze eindsituatie wordt doormiddel van een toets vastgesteld.

Daarnaast is het belangrijk om erachter te komen wat ze voor het vak wiskunde moeten kunnen om de opgaven te maken van de methode die op hun middelbare school gebruikt wordt. Hiervoor is een methode-analyse nodig van de methode waarmee wordt gewerkt.

5.1 Praktijkonderzoek naar eindsituatie groep 8

5.1.1 Toets

Om een duidelijk beeld te krijgen van de eindsituatie heb ik een toets ontwikkeld die u vindt in bijlage 2. De inhoud van de toets is gebaseerd op de opbouw die genoemd is in de theorie. Bij het maken van de toets is ook gekeken naar de methode die op de Calvijnsschool wordt gebruikt. De methode Pluspunt geeft ruimschoots aandacht aan het vermenigvuldigen van een breuk met een heel getal, ook op formeel niveau.

Zowel binnen een betekenisvolle context als op formeel niveau wordt de kennis van de leerlingen getoetst. De kennis die nodig is om alle opgaven te maken gaat dieper dan wat een leerling aan het eind van de basisschool moet beheersen.

Omdat het realistisch rekenen heel veel waarde hecht aan begrip, heb ik dat element ook meegenomen in de toets. De leerlingen kunnen aangeven of ze precies snappen wat ze doen, of dat ze eigenlijk maar wat aan het doen zijn. Volgens het functioneel rekenen is het begrip minder van belang. Zijn er leerlingen die opgaven goed uitvoeren, zonder dat ze precies snappen wat ze doen?

Ook geven de leerlingen aan naar welke school ze gaan en welk niveau ze daar gaan doen. Deze informatie is voor mij nodig om te bepalen welke methodes ik moet analyseren van het voortgezet onderwijs. Zo kan per niveau bepaald worden of de overgang een goede doorgaande lijn is of niet.

De toets is opgebouwd volgens de didactiek van realistisch rekenen, hoofdstuk 2. De toets gaat echter ook verder dan de eindsituatie van de basisschool. Zoals in eerdere hoofdstukken beschreven blijkt uit onderzoek dat leerlingen vermenigvuldigen op formeel niveau nog niet beheersen. Deze toets test of de leerlingen dit daadwerkelijk nog niet kunnen.

Er worden zes verschillende onderdelen getoetst:

1. Opgave 1 tot en met 3 testen de vaardigheid vermenigvuldigen van een breuk met een heel getal binnen een betekenisvolle context.
2. Opgave 4 tot en met 7 testen de vaardigheden met betrekking tot het vermenigvuldigen van breuken met breuken binnen een betekenisvolle context.
3. Opgave 8 en 9 gaan over een heel getal vermenigvuldigen met een breuk op formeel niveau.
4. Bij opgave 10 moeten stambreuken met elkaar vermenigvuldigd worden.
5. Opgave 11 en 12 gaan over vermenigvuldigen van breuken op een formeel niveau.
6. Als laatste moeten bij opgave 13 samengestelde getallen worden vermenigvuldigd.

5.1.2 Betrouwbaarheid en validiteit

Om het onderzoek betrouwbaar te maken zijn er meerdere opgaven die hetzelfde onderdeel testen. Daarnaast heb ik de toets eerst voorgelegd aan de leerkracht van de groep om te kijken of de opgaven juist en helder zijn geformuleerd. Na dit gesprek heb ik een aantal kleine aanpassingen gedaan. Daarna heb ik de toets voorgelegd aan een aantal leerlingen van groep 8 van een andere basisschool. De toets bleek helder, de vraagstelling was duidelijk voor de leerlingen. De uitkomsten sloten aan bij mijn verwachtingen.

Het doel van de toets is het vastleggen van de eindsituatie van de basisschool op het gebied vermenigvuldigen met breuken. Om de resultaten zo valide mogelijk te maken is de toets aan het eind van het schooljaar in groep 8 afgenomen, twee weken voor de vakantie. Dit is echt het eind van de basisschooltijd voor de leerlingen, waardoor echt de eindsituatie in beeld komt.

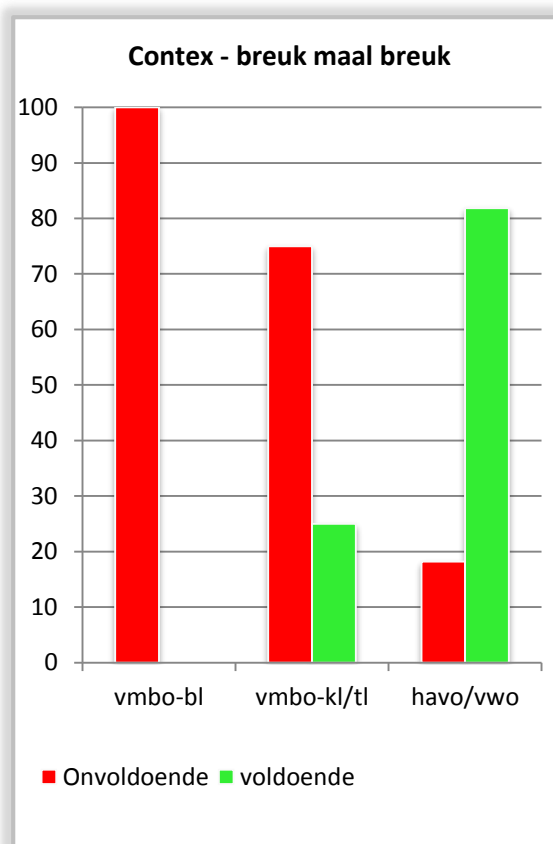
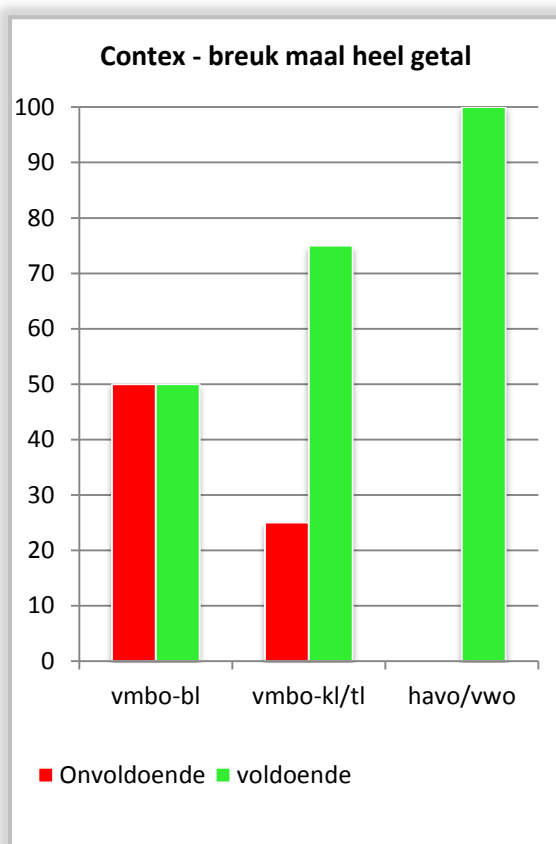
Om de eindsituatie te beoordelen is het van belang dat de toets verder gaat dan de behandelde stof, zodat leerlingen die een hoog niveau hebben ook het maximale niveau kunnen laten zien. Om een compleet beeld te krijgen van het vermenigvuldigen met breuken zijn er zes verschillende onderdelen getoetst. (Kallenberg , 2007)

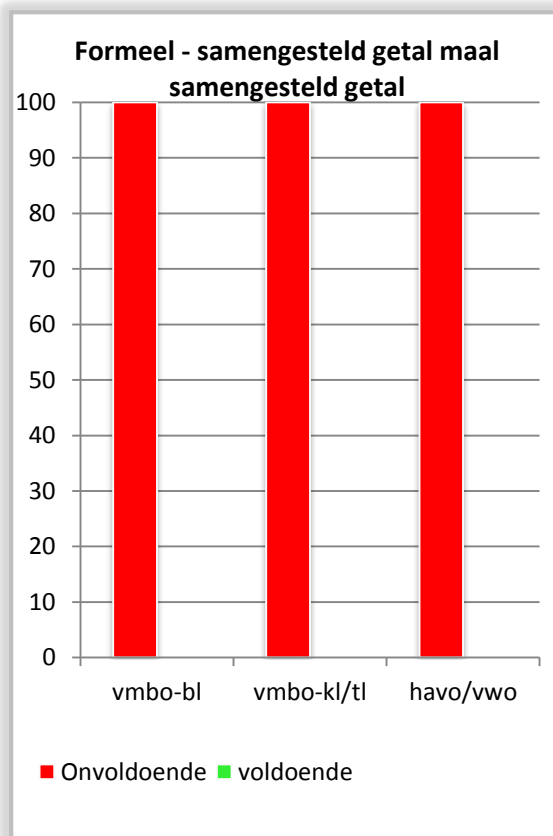
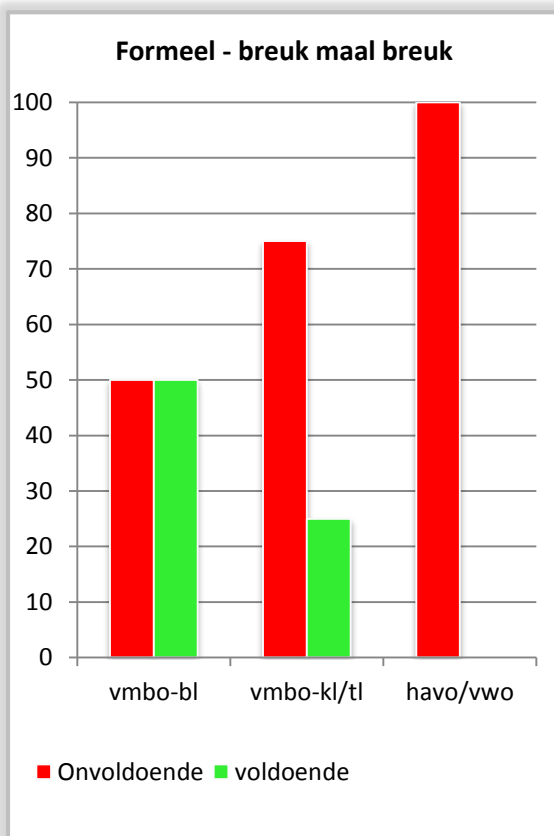
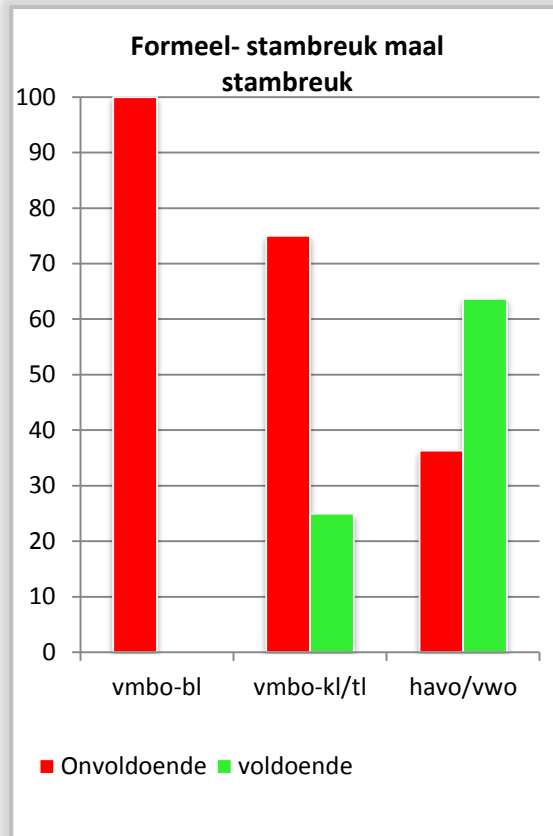
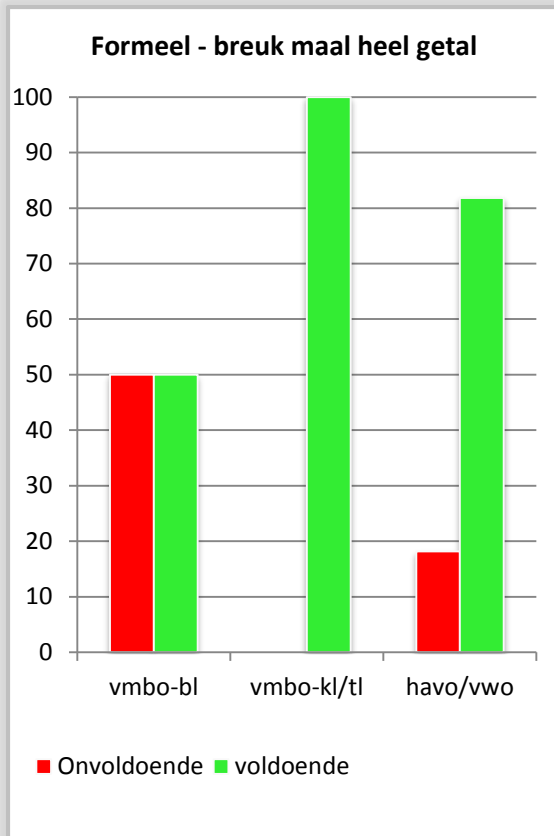
5.1.3 Beoordeling en resultaten

De toets is gemaakt door alle 17 leerlingen van groep 8 van de Calvijnschool in Bunschoten (schooljaar 2012-2013). Van deze leerlingen gaan er twee naar de beroepsgerichte leerweg van het vmbo. Vier leerlingen gaan naar vmbo kader- of theoretische leerweg. Elf leerlingen gaan naar havo/vwo.

De opgaven zijn opgesplitst in 6 onderdelen, zoals hiervoor beschreven. Elke opgave is beoordeeld met 2 punten. Als de juiste bewerking gekozen is en het juiste antwoord gevonden wordt dat beoordeeld met 2 punten. Als alleen de bewerking juist is, maar niet juist is uitgevoerd is dit 1 punt waard. Vervolgens is per onderdeel de score bepaald. 0% – 55% van de punten is onvoldoende. 55%-100% is voldoende.

Hieronder worden per onderdeel in een grafiek de resultaten weergegeven. Er wordt per niveau aangegeven hoeveel procent van de leerlingen onvoldoende scoorde en hoeveel procent er een voldoende heeft gehaald.





Wat in de scores duidelijk wordt, is dat er een groot verschil is tussen de vmbo-leerlingen en de havo/vwo-leerlingen. Alle leerlingen kunnen aan het eind van de basisschool een breuk vermenigvuldigen met een heel getal binnen een bepaalde context. Haal je de context weg, dan lukt het de meeste leerlingen nog steeds de vermenigvuldiging op een juiste manier op te lossen. Bij breuken met breuken vermenigvuldigen haken vmbo-bl leerlingen af. Ook leerlingen die vmbo-kl/tl gaan doen hebben hier moeite mee. Voor de meeste leerlingen die havo/vwo gaan doen is dit geen probleem. De opgave over de chocoladereep werd zonder al te veel problemen gemaakt. Zeven van de elf havo/vwo leerlingen kunnen ook stambreuken met elkaar vermenigvuldigen. Ook een leerling die naar vmbo-tl gaat kan dit op formeel niveau. De rest van de opgaven, op formeel niveau, waren duidelijk een stap te ver. Een enkele leerling had er één goed.

Bij elke opgave is ook gevraagd of de leerling snapte wat hij aan het doen was, of maar gewoon iets uitprobeerde. Bij de meeste onderdelen was de score van beheersing gelijk aan het begrip. Als de leerlingen snapt wat ze deden, was het antwoord meestal ook goed. Als ze het niet snapt, klopte het antwoord vaak niet. Hier was één opvallende afwijking: formeel vermenigvuldigen met stambreuken. Veel leerlingen maakten de som $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ helemaal goed, zonder dat ze snapt hoe ze dit uit zouden moeten rekenen.

Bij het analyseren van de toets vielen twee dingen er op. Als eerste waren er veel leerlingen die de breuken gingen omzetten naar kommagetallen en zo op een antwoord kwamen. Hier komt een kenmerk van realistisch rekenen naar voren, namelijk verschillende oplossingsstrategieën. Toch zorgde dit voor problemen. De som $6 \times \frac{1}{3}$ werd $6 \times 0,33 = 1,98$. Dat is afgerond ook 2, maar dus niet precies hetzelfde als $6 \times \frac{1}{3}$. Ook bij de minder bekende breuken werkte de strategie, omrekenen naar kommagetallen, niet meer.

Het tweede wat opvalt is dat er twee vmbo-leerlingen wel op een goede manier op formeel niveau vermenigvuldigd hebben met breuken. De leerlingen werkten met het algoritme teller maal teller en noemer maal noemer. Ze gaven aan geen idee te hebben of dit klopte, maar kwamen wel op het goede antwoord. Dit lijkt ervoor te pleiten dat begrip niet altijd noodzakelijk is om bij het goede antwoord te komen. Maar de opgave met de context waarin breuken vermenigvuldigd worden, hebben ze niet goed gedaan. Ze kunnen de strategie dus niet op gebruiken op functioneel niveau, wat wel het doel is bij functionele gecijferdheid.

5.2 Methode-analyse wiskunde methodes

De leerlingen gaan naar twee verschillende scholen voor voortgezet onderwijs. Ze verspreiden zich over 3 verschillende niveaus: vmbo bl/kl, vmbo kl/tl en havo/vwo. De beroeps- en kadergerichte leerweg is op het Oostwende in Spakenburg, hier gaan twee leerlingen naar toe. Vier leerlingen gaan vmbo kl/tl doen op de Guido de Brès in Amersfoort. Er gaan elf leerlingen havo/vwo doen, ook op de Guido de Brès in Amersfoort.

Op het Oostwende wordt de methode 'getal en ruimte' gebruikt. Op de Guido de Brès wordt op alle niveaus gewerkt met moderne wiskunde. Deze methodes zijn geanalyseerd op wat ze aan bieden op het gebied van vermenigvuldigen met breuken. Dit is in schema's weergegeven.

5.2.1 Analyse Getal & Ruimte, vmbo bl/kl, Oostwende

Methode	Getal & Ruimte, 10 ^e editie (A+B)
Uitgever	Educatieve Partners Nederland (EPN)
Jaar van uitgave	2011
Niveau	Vmbo-bk
Aantal pagina's over vermenigvuldigen met breuken	2 pagina's over breuk-rekenen, enkele opgaven over vermenigvuldigen
Aantal opdrachten over vermenigvuldigen met breuken	Er zijn 2 opdrachten waar de oplossing door middel van vermenigvuldigen met een breuk gevonden zou kunnen worden. Het is niet noodzakelijk dit te doen, een andere strategie zou ook kunnen.
Inhoud theoriedeel	Er is geen apart kader met theorie over het vermenigvuldigen met breuken.
Inhoud en opbouw van de opgaven	De opgaven staan in een betekenisvolle context. Ze gaan over een deel berekenen van bijvoorbeeld een kiloprijs. De oplossing mag ook met een verhoudingstabel gezocht worden.
Conclusie	Deze methode besteedt geen aandacht aan vermenigvuldigen met breuken als apart onderdeel. Het is in de opdrachten verweven, maar kan door gebruik andere strategieën eenvoudig vermeden worden. De resultaten van de toets in groep 8 hebben laten zien dat de leerlingen op dit niveau dit matig of voldoende beheersen. De methode sluit op basis van die gegevens goed aan, omdat er verder geoefend wordt met de stof van de basisschool waar de leerlingen nog moeite mee hebben.

5.2.2 Analyse Moderne Wiskunde, vmbo kl/tl, Guido de Brès

Methode	Moderne Wiskunde, 9^e editie (A+B)
Uitgever	Wolters-Noordhoff
Jaar van uitgave	2008
Niveau	Vmbo-kgt
Aantal pagina's over vermenigvuldigen met breuken	2 over het rekenen met breuken, een klein deel daarvan gaat over vermenigvuldigen met breuken. Het zijn de extra opgaven aan het eind van een hoofdstuk.
Aantal opdrachten over vermenigvuldigen met breuken	5, onderverdeeld in a, b, c, ... sommigen tot en met h.
Inhoud theoriedeel	In de theorie wordt uitgelegd dat een breuk door middel van een verhoudingstabel omgerekend kan worden naar een percentage. Er wordt aangegeven hoe dit op de rekenmachine kan. De theorie gaat niet verder dan het vermenigvuldigen van een breuk naar een heel getal. De vermenigvuldiging met de breuk wordt niet heel duidelijk. Het moet in de rekenmachine ingevoerd worden als teller : noemer x getal = antwoord. Voorbeeld genoemd in de theorie: $3 : 4 \times 100 = 75$.
Inhoud en opbouw van de opgaven	De opgaven staan allemaal in een betekenisvolle context. Het vermenigvuldigen met breuken wordt steeds in verband gebracht met percentages. Breuken met breuken vermenigvuldigen komt nog niet voor.
Conclusie	De methode besteedt weinig aandacht aan vermenigvuldigen met breuken. Wat er wel genoemd wordt sluit goed aan bij de eindsituatie van de basisschool, omdat er altijd een passende context wordt gebruikt en de link naar percentages wordt gelegd. Dit is voor veel leerlingen een bekende strategie die ze ook in de toets gebruikten eind groep 8. Ook worden er alleen hele getallen met breuken vermenigvuldigd. Dit beheersen de leerlingen al goed. De volgende stap waar de leerlingen aan toe zijn, breuk maal breuk, komt nog niet aan bod. Op basis van de resultaten van de toets in groep 8 en de analyse van deze methode, zouden de leerlingen die vmbo kl/tl gaat doen op de Guido de Brès weinig problemen ervaren op het gebied vermenigvuldigen met breuken.

5.2.3 Analyse Moderne Wiskunde, havo/vwo, Guido de Brès

Methode	Moderne Wiskunde, 9^e editie
Uitgever	Wolters-Noordhoff
Jaar van uitgave	2008
Niveau	Havo/vwo
Aantal pagina's over vermenigvuldigen met breuken	2
Aantal opdrachten over vermenigvuldigen met breuken	5 opgaven, meerdere onderdelen per opgave.
Inhoud theoriedeel	Aan de hand van een aantal voorbeelden wordt aangetoond dat er een algoritme is voor het vermenigvuldigen van breuken, namelijk teller maal teller en noemer maal noemer. Vervolgens wordt het algoritme schematisch weergegeven met woorden, toegelicht met nog een aantal voorbeelden. Er wordt ook uitgelegd hoe je moet vermenigvuldigen met samengestelde getallen. De helen moeten binnen de breuk gebracht worden en vervolgens kan weer teller maal teller en noemer maal noemer gedaan worden.
Inhoud en opbouw van de opgaven	De paragraaf over vermenigvuldigen met breuken begint met een oriënterende opdracht aan de hand van een schema. Daarna volgt de theorie. Na de theorie staan er een aantal opdrachten waar op formeel niveau moet worden vermenigvuldigd met breuken en samengestelde getallen. Na de formele sommen volgen een paar opgaven met een context waarbij de theorie toegepast moet worden. In de hele methode staat aangegeven waarbij de rekenmachine gebruikt mag worden. Bij dit onderdeel wordt niet aangegeven dat de rekenmachine gebruikt mag worden. Er staat ook nergens uitgelegd hoe je deze sommen met een rekenmachine zou moeten uitrekenen.
Conclusie	De nieuwe methodes lijken goed aangepast te zijn op de eindsituatie van het basisonderwijs. Ook deze methode lijkt goed aan te sluiten. De leerlingen lieten bij het maken van de toets zien stambreuken op een goede manier te kunnen vermenigvuldigen. Voor de volgende stap, het vermenigvuldigen van de breuken, is het algoritme van belang. Dit wordt hier op een duidelijke manier aangeboden. Volgens de toetsresultaten zijn de leerlingen toe aan deze stap. Het gevaar is dat ze deze theorie niet kunnen koppelen aan wat ze eerder geleerd hebben, hierdoor zou het begrip minder goed kunnen zijn en een 'trucje' worden aangeleerd.

6. Conclusie, adviezen en discussie

Uit het theorieonderzoek is gebleken dat de eindsituatie niet helemaal duidelijk vaststaat en dat er problemen kunnen ontstaan bij de overgang naar het voortgezet onderwijs (hoofdstuk 4). Met die kennis is het praktijkonderzoek gedaan. De eindsituatie is vastgelegd doormiddel van een toets en de methodes van het voortgezet onderwijs zijn geanalyseerd. Op basis van al deze uitkomsten wil ik antwoord geven op de onderzoeksvraag: Sluit de aanpak bij het vermenigvuldigen met breuken in het voortgezet onderwijs aan bij de aanpak en eindsituatie van het basisonderwijs voor leerlingen van de Calvijnschool in Spakenburg?

Om deze vraag te beantwoorden is het belangrijk om eerst naar de eindsituatie van het basisonderwijs in het algemeen te kijken. De leerlingen moeten aan het eind van de basisschool in ieder geval een hele met een breuk kunnen vermenigvuldigen. Daarnaast is het onduidelijk of ze ook eenvoudige breuken met elkaar moeten kunnen vermenigvuldigen. De didactiek is gebaseerd op realistisch rekenen, waarbij begrip centraal staat. Er is ruimte voor verschillende strategieën. De opgaven staan grotendeels in een betekenisvolle context. De toets om de eindsituatie te bepalen laat zien dat de eindsituatie overeenkomt met de eindsituatie die beschreven is in hoofdstuk 1. Kort gezegd: De gemiddelde leerling kan een hele vermenigvuldigen met een breuk binnen een context en op formeel niveau. Leerlingen met een hoger niveau kunnen breuken vermenigvuldigen binnen een context en een deel van hen kan ook stambreuken op formeel niveau vermenigvuldigen.

In het voortgezet onderwijs is de aanpak bij vermenigvuldigen met breuken afhankelijk van het niveau en de methode. Volgens de theorie zijn er problemen bij de overgang, doordat de leerlingen opeens op een formeel niveau moeten gaan rekenen. Dit sluit niet aan bij de uitgangspunten van realistisch rekenen. Ook door het gebruik van de rekenmachine zouden er volgens de theorie problemen ontstaan, later in het wiskundeonderwijs bij algebra.

Omdat er in het voortgezet onderwijs grote verschillen zijn per niveau is de onderzoeksvraag niet met één antwoord te beantwoorden. Per niveau is het antwoord verschillend.

Voor leerlingen van de Calvijnschool die naar vmbo-bl gaan hoeft de overgang naar het voortgezet onderwijs geen grote problemen op te leveren. De methode (getal & wereld) sluit goed aan bij het eindniveau van deze leerlingen. Er wordt weer gewerkt binnen een context en er wordt verder gegaan bij wat de leerlingen matig tot voldoende beheersen, namelijk het vermenigvuldigen van een heel getal met een breuk. Van daaruit volgt een logische opbouw.

Leerlingen van groep 8 die naar vmbo-kl/tl gaan zullen ook geen grote problemen tegenkomen. Ze hebben in de toets laten zien op een redelijk niveau te kunnen vermenigvuldigen, waarbij ze ook gebruik maken van andere strategieën. In de methode komt dit terug. Breuken worden in de methode in verband gebracht met procenten en vervolgens met de rekenmachine berekend. Leerlingen zouden pas in de problemen komen als ze bijvoorbeeld door willen stromen naar de havo en daar het breukrekenen tegenkomen bij algebra.

Volgens de theorie zouden leerlingen op havo/vwo de meeste problemen krijgen met het breukrekenen. Dit zou veroorzaakt worden doordat er opeens op formeel niveau gewerkt gaat worden. De resultaten van de toets laten echter zien dat dit wel de logische volgende stap zou zijn voor deze leerlingen. Een deel van hen kan al stambreuken vermenigvuldigen en loopt vast bij andere breuken, omdat ze geen algoritme kennen om mee te werken. Voor deze leerlingen uit groep 8 zie ik, tegen de verwachting in, geen problemen. De theorie in het boek is misschien wat kort door de bocht, maar wel helder geformuleerd, wat voor de leerlingen voor duidelijkheid moet zorgen. Alleen leerlingen die de strategie toepassen om altijd om te rekenen naar kommagetallen kunnen in de problemen komen, omdat ze ook in een betekenisvolle context niet echt kunnen rekenen met breuken, maar met kommagetallen. Voor hen is het algoritme niet een logische volgende stap, maar een hele nieuwe manier van werken met getallen.

Kortom ik denk dat de problemen bij de overgang minder groot zijn dan de theorie doet denken. Leerlingen van de Calvijnschool hebben laten zien een goed eindniveau te hebben bij vermenigvuldigen met breuken en de methodes sluiten daar op aan.

Of dit voor meerdere basisscholen ook geldt is op basis van dit onderzoek niet met zekerheid te zeggen. Veel basisscholen gebruiken dezelfde methode, maar de leerkrachten hebben ook invloed op de eindsituatie van een klas. Een breder onderzoek op verschillende scholen in Nederland is nodig om vast te stellen of de resultaten van dit onderzoek ook van kracht zijn voor andere scholen. Voor leerlingen van de Calvijnschool lijken er weinig problemen te ontstaan bij de overgang. De theorie laat echter zien dat er voor sommige leerlingen wel problemen kunnen ontstaan. Een uitgebreider onderzoek kan dit bewijzen of verwerpen.

Daarnaast kan er na dit onderzoek onderzocht worden hoe de aansluiting nog beter kan. Is er tijd om op de basisschool meer aandacht te geven aan het vermenigvuldigen met breuken of moet hier in het voortgezet onderwijs ruimte voor worden gemaakt?

Het grootste probleem ligt volgens mij bij de leerkrachten en docenten. De uitgangspunten van realistisch rekenen vind ik goed, maar ik denk dat de leerkrachten vergeten hoe belangrijk de sturing

is die zij de leerlingen moeten geven, om steeds een fase verder te komen. Docenten in het voortgezet onderwijs moeten beter op de hoogte zijn van de beginsituaties van de verschillende leerlingen, zodat ze daarop kunnen aansluiten.

Wat ook een belangrijke rol speelt is het doel wat de leerkracht of docent voor ogen heeft als er lesgegeven wordt. Wil de wiskundedocent dat de leerlingen het examen voldoende afsluiten of wil hij ze een goede basis geven voor het vervolgonderwijs. Om een goed resultaat te behalen op de cito hoeft de groep 8-leerling niet te kunnen vermenigvuldigen met breuken, maar met name op havo/vwo komt dit wel aan de orden. Een leerling op het vmbo heeft het vermenigvuldigen met breuken niet nodig om het examen te halen, maar kan dit in een (technische) vervolgstudie wel tegenkomen. Hier ontstaat de discussie of de leerkracht wil trainen voor de toets of als doel van zijn lessen functionele gecijferdheid voor ogen heeft.

Bibliografie

- Kerdoelen onderbouw voortgezet onderwijs* . (2010, september 17). Opgeroepen op september 10, 2013, van [www.rijksoverheid.nl](http://www.rijksoverheid.nl/documenten-en-publicaties/besluiten/2010/09/17/kerndoelen-onderbouw-voortgezet-onderwijs.html): <http://www.rijksoverheid.nl/documenten-en-publicaties/besluiten/2010/09/17/kerndoelen-onderbouw-voortgezet-onderwijs.html>
- Zo leren wij rekenen*. (8, oktober 2011). Opgeroepen op september 6, 2013, van <http://juftoos.blogspot.nl/>: <http://juftoos.blogspot.nl/2011/10/zo-leren-wij-rekenen.html>
- Bosch, A. v., Velde, J. v., & Verschuren, M. (2010). *KIJK! Groep 5-8 Module Rekenen en Wiskunde*. Middelburg: Bazalt.
- Braams, T., & Milikowski, M. (2008). *De gelukkige rekenklas*. Amsterdam: Uitgeverij Boom.
- Craats, J. v. (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *Tijdschrift voor Remedial Teaching*.
- Dekker, T., & Kindt, M. (2006, december). Wat doen we (niet) met breuken? *Nieuwe Wiskrant*, 6-10.
- EPN. (2011). *Getal & ruimte* . EPN .
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CDbeta Press/Freudenthal Institute .
- Groenestijn, M. v., Borghouts, C., & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie*. Assen: Koninklijke Van Gorcum BV.
- Kallenberg , T. (2007). *Ontwikkeling door onderzoek*. Utrecht/Zutphen: ThiemeMeulenhoff.
- Melis. (1995). *Het verantwoord gebruik van Didactische Leeftijds Equivalenten (DLE's)*. Opgeroepen op augustus 2013, 28, van www.wij-leren.nl: <http://wij-leren.nl/DLE-normering.php>
- Melis, G. (1995). *DLE Boek*. Amsterdam: Boom test uitgevers.
- Noteboom, A. (2009, september). *Uitwerking van het Fundamenteel niveau 1F voor einde basisonderwijs, versie 1.2*. Opgeroepen op september 3, 2013, van [rekendoelen.slo.nl](http://www.slo.nl/primair/leergebieden/rekenen/minimumdoelen/): <http://www.slo.nl/primair/leergebieden/rekenen/minimumdoelen/>
- PPON. (2005). *Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling .
- SLO. (2006). *Kerdoelen*. Opgeroepen op juni 10, 2013, van www.slo.nl: <http://www.slo.nl/primair/kerndoelen/>
- SLO. (2010). *1F - Rekenen*. Opgeroepen op september 4, 2013, van www.taalenrekenen.nl: http://www.taalenrekenen.nl/ref_niveaus_rekenen/uitwerkingen/uitgelegd/1F/
- SLO. (2010). *1S - Rekenen*. Opgeroepen op september 6, 2013, van www.taalenrekenen.nl: http://www.taalenrekenen.nl/ref_niveaus_rekenen/uitwerkingen/uitgelegd/1S/

- SLO. (2010). *Verschil tussen kerndoel en referentieniveau* . Opgeroepen op september 3, 2013, van www.taalenrekenen.nl:
<http://www.taalenrekenen.nl/referentiekader/betekenis/schoolleider/vragenschoolleider/>
- Tal-team. (2005). Vermenigvuldigen met breuken. In *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen* (pp. 81-84). Groningen: Wolters-Noordhoff bv.
- Wolters-Noordhoff. (1997). *Moderne Wiskunde* . Groningen: Wolters-Noordhoff.

Bijlage 1 – Onderzoeksopzet

Naam en studentnummer: Marlies Duijst, 100734	
A. (Voorlopige) resultaten literatuuronderzoek	In de theorie is duidelijk geworden dat de eindsituatie van de basisschool op het gebied vermenigvuldigen met breuken niet helemaal duidelijk is. In ieder geval moet er binnen een context met een breuk en een heel getal vermenigvuldigd kunnen worden. Volgens de theorie zijn de problemen bij de overgang afhankelijk van het niveau in het voortgezet onderwijs. De leerlingen op havo/vwo krijgen het meest problemen. Eerdere onderzoeken stellen vast dat er problemen zijn bij de overgang. Verschillende hoogleraren wijzen het realistisch rekenen als schuldige aan. Ik denk dat er inderdaad door uitgangspunten van realistisch rekenen minder goed op formeel niveau kan worden vermenigvuldigd met breuken. Begrip is heel belangrijk bij realistisch rekenen. Dit onderdeel ga ik verwerken in de toets om te testen of leerlingen echt alleen vanuit het begrip de opgaven kunnen maken.
B. Onderzoeksvraag, deelvragen en soort onderzoek	De hoofdvraag van mijn praktijkonderzoek blijft hetzelfde: Sluit de aanpak bij het vermenigvuldigen met breuken in het voortgezet onderwijs aan bij de aanpak en eindsituatie van het basisonderwijs voor leerlingen van groep 8 van de Calvijnschool in Spakenburg? Het literatuuronderzoek zorgt wel voor andere deelvragen. Door de onduidelijke formulering van de referentieniveaus wil ik de eindsituatie vaststellen door middel van een toets, waarin ook het begrip van de leerlingen is verwerkt. Deelvragen voor het onderzoek zijn: Wat is de eindsituatie van groep 8 van de Calvijnschool bij vermenigvuldigen met breuken? Wat wordt er in de wiskundemethodes van de leerlingen gevraagd op het gebied vermenigvuldigen met breuken? (per niveau)
C. Onderzoeksgroep	Mijn onderzoeksgroep is groep 8 van de Calvijnschool in Spakenburg. Deze klas heeft 17 leerlingen. Zij maken de toets en afhankelijk van hun keuzes voor voortgezet onderwijs worden methodes geanalyseerd. De conclusie van dit onderzoek geldt voor deze specifieke groep. voor groepen die dezelfde methode gebruiken op de basisschool en dezelfde methoden krijgen op het voortgezet onderwijs zullen de resultaten ook gelden.
D. Onderzoeksinstrumenten	Voor dit onderzoek heb ik een toets ontwikkeld (toelichting in hoofdstuk 5, toets in bijlage 2).
E. Analyseplan	Kwantitatief: gegevens van de toets. Kwalitatief: analyses van de methodes voor wiskunde.
F. Tijdpad	Eind juni afnemen van de toets Zomervakantie verzamelde gegevens verwerken

Bijlage 2 – Toets praktijkonderzoek

Afstudeeronderzoek Marlies Duijst

juli 2013

Naam:

Naar welke school ga je volgend jaar?

Welk niveau ga je doen?

Opgaven

1. Vier mensen eten ieder $\frac{3}{4}$ pizza. Hoeveel pizza heb je nodig?

Ik doe maar wat *Ik snap precies wat ik doe*

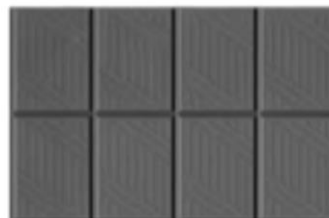
2. Je hebt $\frac{4}{7}$ meter stof nodig. De stof kost € 8,00 per meter. Hoeveel kost het stuk dat je nodig hebt?

Ik doe maar wat *Ik snap precies wat ik doe*

3. Appels kosten € 1,16 per kilo. Hoeveel betaal je per $\frac{3}{4}$ kilo?

Ik doe maar wat *Ik snap precies wat ik doe*

4. Je hebt een reep chocolade van 8 stukken. Je krijgt $\frac{1}{7}$ van één stuk. Hoeveelste deel van de hele reep krijg je?



Ik doe maar wat *Ik snap precies wat ik doe*

5. Kan je hier ook een som bij maken?

Ik doe maar wat *Ik snap precies wat ik doe*

6. Je krijgt nu niet $\frac{1}{2}$ van een stuk, maar $\frac{2}{3}$. Hoeveelste deel van de hele reep krijg je nu?

ik doe maar wat

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ik snap precies wat ik doe

7. Welke soms hoor daar bij?

ik doe maar wat

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ik snap precies wat ik doe

8. $\frac{1}{4} \times 5 =$

ik doe maar wat

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ik snap precies wat ik doe

9. $6 \times \frac{1}{2} =$

ik doe maar wat

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ik snap precies wat ik doe

10. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} =$

ik doe maar wat

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ik snap precies wat ik doe

11. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$

ik doe maar wat

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ik snap precies wat ik doe

12. $\frac{10}{11} \times \frac{9}{10} =$

ik doe maar wat

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ik snap precies wat ik doe

13. $2\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{4} =$

ik doe maar wat

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 ik snap precies wat ik doe